详细解答

STEP III 2009，第 8 题

纯数学 · 极限与归约公式

STEP III 2009，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/09-s3-q8

本题在 *Beyond STEP* 第 4.5 节大二学生之梦中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch04/sophomores-dream.html

关键思路

每一部分都围绕着对数（logarithm）的“弱”：在 0 附近，$\ln x$ 趋向无穷的速度极慢，以致 x 的任何正数次幂都能压倒 $\ln x$ 的任何次幂。代换（substitution）$x = \mathrm{e}^{-t}$ 把这件事化为题目给出的事实：指数函数胜过幂函数。分部积分（integration by parts）时，正是这个极限（limit）令边界项（boundary term）消失。在最后一部分，把指数函数的级数（series）用于 $x^x = \mathrm{e}^{x\ln x}$，得出的恰好就是第 (ii) 部分的积分。

解答

第 (i) 部分

由于 $\ln x$ 只在 $x > 0$ 时有定义，这个极限的意思是 $x \to 0^+$。设 $x = \mathrm{e}^{-t}$，则 $\ln x = -t$，而 $x \to 0^+$ 恰好相当于 $t \to \infty$。于是

$$x^m (\ln x)^n = \mathrm{e}^{-mt}(-t)^n = (-1)^n \mathrm{e}^{-mt} t^n.$$

因子 $(-1)^n$ 只是一个固定的正负号，而根据题目给出的结果，当 $t \to \infty$ 时 $\mathrm{e}^{-mt}t^n \to 0$。因此

$$\lim_{x\to 0} x^m (\ln x)^n = 0.$$

至于第二个结果，取 $m = n = 1$：由此得当 $x \to 0$ 时 $x\ln x \to 0$。由于指数函数是连续

（continuous）的，

$$x^x = \mathrm{e}^{x\ln x} \to \mathrm{e}^0 = 1 \qquad \text{当} x \to 0,$$

这正是所要证明的。

第 (ii) 部分

首先，这个积分是有意义的。被积函数（integrand）$x^m(\ln x)^n$ 在 $(0,1]$ 上连续，而且根据第 (i) 部分，当 $x \to 0$ 时它趋向 0。所以它在 $(0,1]$ 上有界（bounded），I_n 是一个普通的（收敛（convergent）的）积分。

对 I_{n+1} 作分部积分，取 $u = (\ln x)^{n+1}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = x^m$，于是 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{(n+1)(\ln x)^n}{x}$ 及 $v = \dfrac{x^{m+1}}{m+1}$：

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \left[\frac{x^{m+1}(\ln x)^{n+1}}{m+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{m+1}}{m+1}\cdot\frac{(n+1)(\ln x)^n}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^{m+1}(\ln x)^{n+1}}{m+1}\right]_0^1 - \frac{n+1}{m+1}\int_0^1 x^m(\ln x)^n\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

? **想一想** 在 $x = 0$ 处，$\ln x$ 根本没有定义，那么该处的边界项是甚么？

下限其实是指 $x \to 0^+$ 时的极限。根据第 (i) 部分，以 $m+1$ 和 $n+1$ 代替 m 和 n（两者都符合条件，因为 $m+1 \geq 1$ 及 $n+1 \geq 0$），可得 $x^{m+1}(\ln x)^{n+1} \to 0$。在上限处，$\ln 1 = 0$ 而 $n+1 \geq 1$，所以该项也是 0。因此方括号内的一项为零，于是

$$I_{n+1} = -\frac{n+1}{m+1}\,I_n,$$

这正是所要证明的。

要计算 I_n，由

$$I_0 = \int_0^1 x^m\,\mathrm{d}x = \frac{1}{m+1}.$$

出发。递推关系（recurrence）的每一步都乘以 $-\dfrac{k}{m+1}$，其中 $k = 1, 2, \ldots, n$，所以

$$I_n = \left(-\frac{1}{m+1}\right)\left(-\frac{2}{m+1}\right)\cdots\left(-\frac{n}{m+1}\right)\frac{1}{m+1} = \frac{(-1)^n\,n!}{(m+1)^{n+1}}.$$

（用一行归纳法（induction）便可确认：若结果对 n 成立，则由递推关系得 $-\frac{n+1}{m+1}\cdot\frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}} = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(m+1)^{n+2}}$。）

第 (iii) 部分

对于 $0 < x \leq 1$，写 $x^x = \mathrm{e}^{x \ln x}$，并使用指数级数：

$$x^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x \ln x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n (\ln x)^n}{n!}.$$

（函数在 $x = 0$ 处的值不影响积分；根据第 (i) 部分，函数 x^x 在该处趋向 1，所以它有界，这个积分是普通的积分。）

现在逐项积分（integrate term by term）。$n = 0$ 的一项是 $\int_0^1 1 \,\mathrm{d}x = 1$。对于 $n \geq 1$，第 n 项就是第 (ii) 部分的 I_n，其中 $m = n$（符合条件，因为此时 m 是正整数）：

$$\frac{1}{n!} \int_0^1 x^n (\ln x)^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n!} \cdot \frac{(-1)^n \, n!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

这条公式在 $n = 0$ 时同样给出 1。所以

$$\int_0^1 x^x \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}} = 1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{3}\right)^3 - \left(\tfrac{1}{4}\right)^4 + \cdots,$$

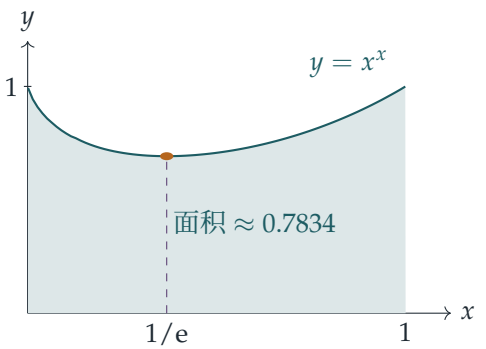
这就是所求的结果。

想一想 我们可以对无穷级数逐项积分吗?

并非必然可以，但在这里是稳妥的，因为 $x \ln x$ 始终很小。它的导数是 $\ln x + 1$，所以在 $(0, 1]$ 上它在 $x = 1/\mathrm{e}$ 处取得最小值，而且 $|x \ln x| \leq 1/\mathrm{e} < 1$。设 $u = x \ln x$，若在 u^N 项之后截断级数，则余项（remainder）满足

$$\left| \sum_{n>N} \frac{u^n}{n!} \right| \leq \sum_{n>N} \frac{|u|^n}{n!} \leq \sum_{n>N} \frac{1}{n!} \leq \frac{2}{(N+1)!}$$

对 $(0, 1]$ 内的每一个 x 都成立。在长度为 1 的区间上积分，截断后逐项积分的误差最多是 $2/(N+1)!$，而它趋向 0。所以积分等于级数的和。



验算

- 在第 (ii) 部分取 $m = 1$、$n = 1$：$\int_0^1 x \ln x \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{4}$，与直接分部积分的结果一致（$[\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2]_0^1 = -\frac{1}{4}$）。
- 数值上，用中点法则（midpoint rule）可得 $\int_0^1 x^x \, \mathrm{d}x \approx 0.7834305$，而部分和（partial sums）$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{27} - \frac{1}{256} + \frac{1}{3125} - \cdots$ 只需寥寥数项便稳定于 0.7834305，因为各项缩小得极快。
- 图像位于其最小值 $\mathrm{e}^{-1/\mathrm{e}} \approx 0.69$ 与 1 之间，所以面积必定介乎 0.69 与 1 之间，事实亦确是如此。

常见错误

- 不加说明便略去 0 处的边界项。这正是第 (i) 部分的全部用意，而且需要 $m + 1 \geq 1$。
- 弄错 I_n 的正负号：在 $(0, 1)$ 上 $\ln x < 0$，所以 I_n 的正负号与 $(-1)^n$ 相同。
- 在第 (iii) 部分忘记 $n = 0$ 的一项，而首项的 1 正是由此而来。

STEP 之外

最后这条恒等式称为“二年级生之梦”（sophomore's dream），由约翰·伯努利（Johann Bernoulli）于 1697 年发现。我们需要论证的那一步，即交换积分与无穷求和的次序，是大学一年级分析课的核心课题：当级数一致收敛（converges uniformly）时，这样做是稳妥的，而我们的余项估计所证明的正是这一点（它是魏尔斯特拉斯 M 判别法（Weierstrass M-test）的一个例子）。Abbott 的 *Understanding Analysis* 对一致收敛以及逐项积分何时可行，有十分易读的讲解。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。