详细解答

STEP III 2009，第 7 题

纯数学 · 逐次微分与数学归纳法

> **STEP III 2009，第 7 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/09-s3-q7

关键思路

一切都源自一条看似平平无奇的恒等式（identity）：$(1+x^2)f_0(x)=1$。把它反复求导，就会得出相邻各阶导数（derivative）之间的关系式；而对某个 n 成立的关系式，再求导一次便得到下一条，这正好就是归纳步骤的模样。在第 (ii) 部分，乘以 $1+x^2$ 的适当次幂便可消去所有分母，再用第二次归纳法（induction）追踪首项，从而确定次数。

解答

第 (i) 部分

把 $f_n(x)$ 简记为 f_n，并以 $P(n)$ 表示以下命题：

$$(1+x^2)f_{n+1}+2(n+1)xf_n+n(n+1)f_{n-1}=0.$$

基础情况（*base case*）。由于对所有 x 都有 $(1+x^2)f_0=1$，求导（并利用 $f_0'=f_1$）得

$$(1+x^2)f_1+2xf_0=0.$$

再求导一次，对每一项使用积法则（product rule），

$$(1+x^2)f_2+2xf_1+2xf_1+2f_0=0, \qquad \text{即} \qquad (1+x^2)f_2+4xf_1+2f_0=0,$$

这就是 $P(1)$。

归纳步骤（*inductive step*）。假设对某个 $n\geq 1$，$P(n)$ 对所有 x 成立。由于它是关于 x 的

恒等式，我们可以对它求导。利用 $f_k' = f_{k+1}$，

$$\begin{aligned} 0 &= (1+x^2)f_{n+2} + 2xf_{n+1} + 2(n+1)f_n + 2(n+1)xf_{n+1} + n(n+1)f_n \\ &= (1+x^2)f_{n+2} + 2(n+2)xf_{n+1} + (n+1)(n+2)f_n, \end{aligned}$$

因为 $2+2(n+1) = 2(n+2)$ 及 $2(n+1)+n(n+1) = (n+1)(n+2)$。这就是 $P(n+1)$。因此根据归纳法，$P(n)$ 对所有 $n \geq 1$ 成立，证明完毕。

（等价地，也可以用莱布尼兹法则（Leibniz's rule）把 $(1+x^2)f_0 = 1$ 求导刚好 $n+1$ 次：由于 $1+x^2$ 的三阶导数为零，只有三项会留下来，而它们正是 $P(n)$ 的三项。）

第 (ii) 部分

首三个。我们有 $P_0 = (1+x^2)f_0 = 1$。其次，

$$f_1 = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, \qquad \text{所以} \qquad P_1 = (1+x^2)^2 f_1 = -2x.$$

用商法则（quotient rule）对 f_1 求导，

$$f_2 = \frac{-2(1+x^2)^2 + 2x\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{-2(1+x^2)+8x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3},$$

所以 $P_2 = (1+x^2)^3 f_2 = 6x^2 - 2$。（在第 (i) 部分取 $n=1$ 会得到相同的结果：$(1+x^2)f_2 = -4xf_1 - 2f_0$。）

递归关系（recurrence）。用积法则对 $P_n = (1+x^2)^{n+1} f_n$ 求导：

$$P_n' = 2(n+1)x(1+x^2)^n f_n + (1+x^2)^{n+1} f_{n+1}.$$

全式乘以 $1+x^2$，每一项都会变成一个 P：

$$(1+x^2)P_n' = 2(n+1)x\,(1+x^2)^{n+1} f_n + (1+x^2)^{n+2} f_{n+1} = 2(n+1)xP_n + P_{n+1}.$$

移项后，

$$P_{n+1} - (1+x^2)P_n' + 2(n+1)xP_n = 0$$

对每个 $n \geq 0$ 成立，证明完毕。这里不需要用归纳法；这是对每个 n 都成立的直接计算。

> **想一想** 我们怎样知道次数恰好是 n，而不会因为最高次项互相抵消而变得更小？

我们证明一个稍强的命题，让它把所需的资料一路带过整个归纳过程：P_n 是一个 n 次多项式（*polynomial*），其首项系数（*leading coefficient*）$a_n \neq 0$。$n = 0$ 的情况成立，因为 $P_0 = 1$。

假设命题对某个 $n \geq 0$ 成立，即 $P_n = a_n x^n + (\text{较低次幂})$，其中 $a_n \neq 0$。根据递归关系，

$$P_{n+1} = (1+x^2)P_n' - 2(n+1)xP_n.$$

右边是一个多项式，因为 P_n 是多项式，所以 P_n' 也是。现在 $P_n' = na_n x^{n-1} + \cdots$（当 $n = 0$ 时这是 0，与 $na_n = 0$ 吻合），所以 $(1+x^2)P_n'$ 的次数至多为 $n+1$，而 x^{n+1} 的系数是 na_n。另外，$2(n+1)xP_n$ 的次数为 $n+1$，首项系数是 $2(n+1)a_n$。因此 P_{n+1} 的次数至多为 $n+1$，而它的 x^{n+1} 系数是

$$a_{n+1} = na_n - 2(n+1)a_n = -(n+2)a_n.$$

这个数不等于零，因为 $a_n \neq 0$ 而 $n+2 > 0$。所以最高次项不可能抵消，P_{n+1} 的次数恰好是 $n+1$。根据归纳法，对每个 $n \geq 0$，P_n 都是 n 次多项式。

额外的收获是：由 $a_{n+1} = -(n+2)a_n$ 及 $a_0 = 1$ 可得 $a_n = (-1)^n(n+1)!$，与上面的 $a_1 = -2$ 和 $a_2 = 6$ 吻合。

验算

- 第 (i) 部分，取 $x = 0$、$n = 1$：由 P_n 可得 $f_0(0) = 1$、$f_1(0) = 0$、$f_2(0) = -2$，而 $f_2 + 0 + 2f_0 = -2 + 2 = 0$。
- 递归关系，取 $n = 1$：$(1+x^2)P_1' - 4xP_1 = -2 - 2x^2 + 8x^2 = 6x^2 - 2 = P_2$。
- 数值上，在 $x = 0.7$ 处，中心差分（central difference）给出 $f_0''(0.7) \approx 0.284164$，而 $(6x^2-2)/(1+x^2)^3 = 0.284164$。我们亦以有理数运算，在 200 个随机有理点上精确验证了第 (i) 部分和递归关系，直至 $n = 12$。

常见错误

- 所证明的基础情况与题目指定的范围不符：第 (i) 部分的恒等式由 $n = 1$ 开始，所以基础情况必须是 $n = 1$，这需要用到 f_2。
- 只说“次数每次增加一”，却没有检查 $(1+x^2)P_n'$ 与 $2(n+1)xP_n$ 的 x^{n+1} 项不会互相抵消。它们的确不会抵消，因为 $n \neq 2(n+1)$，但这一点必须写出来。

STEP 之外

利用复数（complex numbers）把它分解成部分分式（partial fractions），$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{x-\mathrm{i}} - \frac{1}{x+\mathrm{i}}\right)$，每一阶导数都变得容易计算，并得出闭合形式（closed form）$P_n(x) = (-1)^n\, n!\, \operatorname{Im}(x+\mathrm{i})^{n+1}$（不妨用 $n = 1, 2$ 试试）。再设 $x = \cot\theta$，便可看出 P_n 的零

点是 $\cot\frac{k\pi}{n+1}$，其中 $k = 1,\ldots,n$：全部都是实数而且互不相同，就像经典正交多项式（orthogonal polynomials）的零点一样，而那些多项式同样是由反复对一个简单函数求导而产生的。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《复分析：可视化方法》）是个绝佳的去处，可以从中看到复数为何能把这类计算变得服服贴贴。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。