详细解答

STEP III 2009，第 6 题

纯数学 · 托勒密定理

STEP III 2009，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/09-s3-q6

关键思路

单位圆（unit circle）上两点之间的距离只取决于两点之间的夹角，而求这个距离的窍门是抽出“平均”角：$e^{i\beta} - e^{i\alpha}$ 等于 $e^{i(\alpha+\beta)/2}$ 乘以一个纯虚数（purely imaginary number）。一旦把每条弦（chord）都写成半角差的正弦，那条大恒等式就变成一条三角恒等式（trigonometric identity），用积化和差公式（product-to-sum formulae）两三行便可解决。这四点于是构成一个内接于圆的四边形，而该恒等式正是关于这种四边形的一条著名定理。

解答

弦长

抽出因子 $e^{i(\alpha+\beta)/2}$：

$$\begin{aligned} e^{i\beta} - e^{i\alpha} &= e^{i(\alpha+\beta)/2}\left(e^{i(\beta-\alpha)/2} - e^{-i(\beta-\alpha)/2}\right) \\ &= e^{i(\alpha+\beta)/2} \cdot 2i \sin \tfrac{1}{2}(\beta-\alpha). \end{aligned}$$

由于 $|e^{i(\alpha+\beta)/2}| = 1$ 及 $|2i| = 2$，

$$|e^{i\beta} - e^{i\alpha}| = 2\,|\sin \tfrac{1}{2}(\beta-\alpha)|.$$

最后，由 $0 < \alpha < \beta < 2\pi$ 得 $0 < \frac{1}{2}(\beta-\alpha) < \pi$，所以正弦值为正，模（modulus）的符号可以除去：$|e^{i\beta} - e^{i\alpha}| = 2\sin \frac{1}{2}(\beta-\alpha)$，此即所求。

? **想一想** 为甚么题目要设 $\alpha < \beta$ 这个条件?

若没有这个条件，$\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$ 便可能落在 $(-\pi, 0)$ 之内，正弦值为负，公式就会给出负的长度。

正是因为各角按大小排列，我们才可以除去模的符号。另外留意 $|e^{i\alpha}-e^{i\beta}|=|e^{i\beta}-e^{i\alpha}|$，所以模内两项的次序并不重要。

恒等式

因为 $0<\alpha<\beta<\gamma<\delta<2\pi$，恒等式中出现的每一对角都是由小至大排列的，所以第一个结果适用于全部六个模。两边同除以公因子 $2\cdot 2=4$ 后，我们需要证明

$$\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha)\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\gamma)+\sin\tfrac{1}{2}(\gamma-\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\alpha)=\sin\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha)\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\beta).$$

最自然的变量是相邻两点之间的三个间距。设

$$x=\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha),\qquad y=\tfrac{1}{2}(\gamma-\beta),\qquad z=\tfrac{1}{2}(\delta-\gamma),$$

则 $\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)=x+y$、$\frac{1}{2}(\delta-\beta)=y+z$ 及 $\frac{1}{2}(\delta-\alpha)=x+y+z$。要证明的是

$$\sin x\sin z+\sin y\sin(x+y+z)=\sin(x+y)\sin(y+z).$$

对每个乘积使用 $2\sin P\sin Q=\cos(P-Q)-\cos(P+Q)$：

$$\begin{aligned}2\sin x\sin z&=\cos(x-z)-\cos(x+z),\\ 2\sin y\sin(x+y+z)&=\cos(x+z)-\cos(x+2y+z),\\ 2\sin(x+y)\sin(y+z)&=\cos(x-z)-\cos(x+2y+z).\end{aligned}$$

把首两行相加，$\cos(x+z)$ 项互相抵消，刚好得到第三行。因此这条三角恒等式成立（事实上对所有 x,y,z 都成立），再乘回 4 并使用弦长公式，便得

$$|e^{i\alpha}-e^{i\beta}|\,|e^{i\gamma}-e^{i\delta}|+|e^{i\beta}-e^{i\gamma}|\,|e^{i\alpha}-e^{i\delta}|=|e^{i\alpha}-e^{i\gamma}|\,|e^{i\beta}-e^{i\delta}|,$$

此即所求。

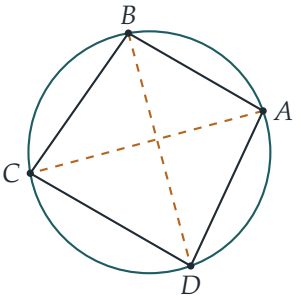
> ? **想一想** 这条三角恒等式对所有 x、y、z 都成立。那么我们在哪里用到 $\alpha<\beta<\gamma<\delta$ 这个次序?

就在把每个模换成 $2\sin$(半角差) 而*不加*模符号的那一步。假如各点的次序乱了，其中一些正弦值便会是负数，各长度之间的恒等式一般就不成立。例如取角度为 $0.3, 2, 1, 4$（即 $\gamma<\beta$），左边约为 4.84，右边约为 1.15。

诠释

设 A,B,C,D 为点 $e^{i\alpha},e^{i\beta},e^{i\gamma},e^{i\delta}$。它们都在单位圆上，而各角的大小次序表示沿逆时针方向走时，我们会依次遇上 A,B,C,D。所以 $ABCD$ 是一个（凸的）圆内接四边形（cyclic quadrilateral），边为 AB,BC,CD,DA，对角线为 AC、BD，而恒等式说的是

$$AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD.$$



任何圆都可以由单位圆经缩放和平移得出，而等式两边按相同的倍数（即缩放因子的平方）缩放，所以这个结果对每个圆内接四边形都成立：在圆内接四边形中，两组对边乘积之和等于两条对角线的乘积。这就是托勒密定理（Ptolemy's theorem）。

验算

- 内接于单位圆的正方形（$\alpha, \beta, \gamma, \delta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$）边长为 $\sqrt{2}$，对角线长为 2：$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4 = 2 \cdot 2$。
- 边长为 a, b 的长方形给出 $a^2 + b^2 = (\text{对角线})^2$：托勒密定理包含了毕氏定理（Pythagoras' theorem）。
- 数值上，随机抽取 10^5 组按大小排列的四个角，两边之差都不超过 2×10^{-15}。

常见错误

- 写下 $|e^{i\beta} - e^{i\alpha}| = 2\sin\frac{1}{2}(\beta - \alpha)$ 而没有检查正弦值是否为正。
- 用复角公式（compound-angle formulae）把 $\sin\frac{1}{2}(\delta - \alpha)$ 等各项按原来的四个角展开：这样做是行得通的，但比使用三个间距 x, y, z 繁复得多。
- 忘记恒等式要求各顶点按环绕圆周的次序排列：右边的是两条对角线，而不是随便两条弦。

STEP 之外

对于处于一般位置的四点，同样的量只满足托勒密不等式（Ptolemy's inequality）$AB \cdot CD + BC \cdot AD \geq AC \cdot BD$，等号成立当且仅当四点按该次序共圆（concyclic）；有一个巧妙的证明，用的是复数恒等式 $(a-b)(c-d) + (a-d)(b-c) = (a-c)(b-d)$ 和三角不等式（triangle inequality）。这背后是交比（cross-ratio），它是莫比乌斯变换（Möbius

transformations）下的不变量，而莫比乌斯变换把圆映射到圆，是复几何的核心。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（以图像直观讲解复分析）把这些想法阐述得十分精彩。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。