详细解答

STEP III 2009，第 5 题

纯数学 · 根的对称函数

STEP III 2009，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/09-s3-q5

关键思路

这一题的一切都围绕着三个基本对称函数（elementary symmetric functions）

$$e_1 = x + y + z, \qquad e_2 = yz + zx + xy, \qquad e_3 = xyz,$$

因为一旦知道它们的值，x、y 和 z 就是一条已知三次方程（cubic）$t^3 - e_1 t^2 + e_2 t - e_3 = 0$ 的根。每一项新资料，都是把两个已知的幂和（power sums）相乘，再看看出现了哪些交叉项而得来的。递推关系（recurrence）则可由这条三次方程直接得出：x、y、z 各自满足该方程，所以它们的各次幂也同样满足。

解答

设 $S_n = x^n + y^n + z^n$，则已知 $S_1 = 1$、$S_2 = 2$、$S_3 = 3$。

$yz + zx + xy$ 的值

把 S_1 平方，

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(yz + zx + xy),$$

所以 $1 = 2 + 2(yz + zx + xy)$，由此得

$$yz + zx + xy = -\tfrac{1}{2},$$

正如所求。

$\sum x^2y$ 的值，然后是 xyz

设 $T = x^2y + x^2z + y^2z + y^2x + z^2x + z^2y$，即所有形如（一个变量的平方）×（另一个不同的变量）的六项之和。把 S_2 乘以 S_1 会得到九项：三个立方项和 T 的六项：

$$(x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z) = (x^3 + y^3 + z^3) + T.$$

因此 $2 \times 1 = 3 + T$，于是

$$T = -1,$$

这就是第二个结果。

? **想一想** 已知的量当中，哪两个相乘会同时包含 T 和 xyz?

试试 $(x + y + z)(yz + zx + xy)$。展开后得到九项。其中六项的形状是 $x \cdot xy = x^2y$，而这些正好就是 T 的六项。其余三项是 $x \cdot yz$、$y \cdot zx$ 和 $z \cdot xy$，每一项都等于 xyz。所以

$$(x + y + z)(yz + zx + xy) = T + 3xyz.$$

代入已知的值，$1 \times (-\frac{1}{2}) = -1 + 3xyz$，所以 $3xyz = \frac{1}{2}$，而

$$xyz = \frac{1}{6},$$

正如所求。

递推关系

现在我们知道 $e_1 = 1$、$e_2 = -\frac{1}{2}$ 和 $e_3 = \frac{1}{6}$。由于

$$(t - x)(t - y)(t - z) = t^3 - e_1t^2 + e_2t - e_3 = t^3 - t^2 - \tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{6},$$

x、y、z 各自都是这条三次方程的根。特别地，

$$x^3 = x^2 + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{6},$$

y 和 z 亦同样如此。乘以 x^{n-2} 得

$$x^{n+1} = x^n + \tfrac{1}{2}x^{n-1} + \tfrac{1}{6}x^{n-2},$$

把 x 换成 y 或 z 也有同样的式子。把三条等式相加，

$$S_{n+1} = S_n + \tfrac{1}{2}S_{n-1} + \tfrac{1}{6}S_{n-2},$$

所以

$$a = 1, \qquad b = \tfrac{1}{2}, \qquad c = \tfrac{1}{6}.$$

想一想 “对所有 n”这个条件，在负数次幂上会否出问题?

当 $n \geq 2$ 时，乘以 x^{n-2} 并无问题。对于较小的 n，我们需要用到 x、y 和 z 的负数次幂，而这些幂是存在的，因为三者都不是零：它们的积是 $\frac{1}{6} \neq 0$。所以这个关系对每一个整数 n 都成立。(即使 x、y、z 并非全是实数，它仍然成立，而事实上它们的确不全是实数：这条三次方程有一个实根，约为 1.431，另有两个互为共轭的复数根（complex conjugate roots)。)

验算

- 取 $n = 2$ 时，递推关系应该重现已知的数据，当中用到 $S_0 = 3$：果然 $S_2 + \frac{1}{2}S_1 + \frac{1}{6}S_0 = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3 = S_3$。
- 递推关系预测 $S_4 = 3 + 1 + \frac{1}{6} = \frac{25}{6}$ 及 $S_5 = \frac{25}{6} + \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = 6$。以数值方法解这条三次方程（根为 1.43085 和 $-0.21542 \pm 0.26471\,\mathrm{i}$)，再把四次幂和五次幂分别相加，得到 4.16667 和 6.00000，两者吻合。这些根在 n 为负数时同样满足递推关系。

常见错误

- 弄错三次方程中的正负号：它是 $t^3 - e_1t^2 + e_2t - e_3$，所以这里 $b = -e_2 = +\frac{1}{2}$ 而 $c = e_3 = \frac{1}{6}$。
- 在 $n = 2$ 检验递推关系时，忘记了 $S_0 = 3$，而不是 1。

STEP 之外

这些就是牛顿恒等式（Newton's identities)，它们把幂和与基本对称函数联系起来，适用于任意数目的变量。在它们背后的是对称多项式基本定理（fundamental theorem of symmetric polynomials)：每一个以 $x_1, \ldots, x_k$ 为变量的对称多项式，都是 $e_1, \ldots, e_k$ 的多项式。S_n 的递推关系是一个线性递推关系（linear recurrence)，其特征方程（characteristic equation）正是那条三次方程本身；同一个想法可用来解线性差分方程（linear difference equations)，并给出斐波那契（Fibonacci）数列的通项公式。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（环、域与群）正是本着这种精神来阐述多项式及其根。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。