详细解答

STEP III 2009，第 4 题

纯数学 · 拉普拉斯变换

> **STEP III 2009，第 4 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/09-s3-q4

关键思路

第 (i) 至 (iii) 部分各自只需对定义所用的积分（integral）施以一行微积分运算：(i) 只是把两个指数函数合并，(ii) 是代换法（substitution），而 (iii) 是分部积分法（integration by parts）。第 (iv) 部分可以连续两次分部积分来完成，但更简洁的做法是使用 (iii) 两次，让 sin 和 cos 的变换互相确定对方。至于最后一部分，可把目标 $\mathrm{e}^{-pt}\cos qt$ 看成分三步构造而成：$\sin t \to \cos t \to \cos qt \to \mathrm{e}^{-pt}\cos qt$，每一步都是四个结果的其中之一。

解答

以 $\mathcal{L}[g](s)$ 表示函数 g 的拉普拉斯变换（Laplace transform），于是 $F = \mathcal{L}[f]$。“合适”是指有关积分收敛（converge）；特别地，我们假设对 $s > 0$，当 $t \to \infty$ 时 $\mathrm{e}^{-st}f(t) \to 0$。

第 (i) 部分

把指数函数合并，

$$\mathcal{L}[\mathrm{e}^{-bt}f(t)](s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\mathrm{e}^{-bt}f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s+b)t}f(t)\,\mathrm{d}t = F(s+b),$$

这正是 F 的定义在 $s+b$ 处的取值。由于 $s+b > 0$，这一步是成立的。

第 (ii) 部分

代入 $u = at$，于是 $t = u/a$ 及 $\mathrm{d}t = \mathrm{d}u/a$。由于 $a > 0$，积分上下限 0 和 ∞ 保持不变，所以

$$\mathcal{L}[f(at)](s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}f(at)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s/a)u}f(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right),$$

这里同样用到 $s/a > 0$。

第 (iii) 部分

使用分部积分法，对 e^{-st} 求导，对 $f'(t)$ 积分：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f'](s) &= \left[\mathrm{e}^{-st}f(t)\right]_0^\infty - \int_0^\infty (-s)\mathrm{e}^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= (0 - f(0)) + s\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= sF(s) - f(0),\end{aligned}$$

其中上限处的项为零，因为当 $t \to \infty$ 时 $\mathrm{e}^{-st}f(t) \to 0$（这是 f 为合适函数的条件之一）。

第 (iv) 部分

设 $S(s) = \mathcal{L}[\sin t](s)$ 及 $C(s) = \mathcal{L}[\cos t](s)$。对 $s > 0$, 两个积分都收敛, 因为 $|\mathrm{e}^{-st}\sin t| \le \mathrm{e}^{-st}$，cos 的情况亦类似；而且 $\mathrm{e}^{-st}\sin t$ 和 $\mathrm{e}^{-st}\cos t$ 都趋向 0，所以 (iii) 对两者均适用。

取 $f = \sin$ 应用 (iii)，其导数（derivative）为 cos，且 $\sin 0 = 0$:

$$C(s) = sS(s).$$

取 $f = \cos$ 应用 (iii)，其导数为 $-\sin$，且 $\cos 0 = 1$:

$$-S(s) = sC(s) - 1.$$

（$-\sin t$ 的变换是 $-S(s)$，因为常数因子可以直接提到积分号外。）把第一条方程代入第二条，

$$-S(s) = s^2S(s) - 1 \quad\Longrightarrow\quad (s^2+1)S(s) = 1 \quad\Longrightarrow\quad S(s) = \frac{1}{s^2+1},$$

这正是所需的结果。顺带可得

$$C(s) = \frac{s}{s^2+1}.$$

最后一部分

> **想一想** 怎样才能不作任何新的积分，就把 $\sin t$ 变成 $\cos qt$?

求导把 sin 变成 cos（这是 (iii)），把 t 重新缩放会把 $\cos t$ 变成 $\cos qt$（这是 (ii)），而乘以一个指数函数就是 (i)。所以我们分三步进行。

第 1 步：$\cos t$。由 (iii)，取 $f(t) = \sin t$，并以 (iv) 的结果作为 F,

$$\mathcal{L}[\cos t](s) = s\cdot\frac{1}{s^2+1} - \sin 0 = \frac{s}{s^2+1}.$$

（这就是第 (iv) 部分顺带得到的结果。）

第 2 步：$\cos qt$。由 (ii)，取 $f(t)=\cos t$ 及 $a=q>0$，

$$\mathcal{L}[\cos qt](s)=\frac{1}{q}\cdot\frac{s/q}{(s/q)^2+1}=\frac{1}{q}\cdot\frac{sq}{s^2+q^2}=\frac{s}{s^2+q^2}.$$

第 3 步：$\mathrm{e}^{-pt}\cos qt$。由 (i)，取 $f(t)=\cos qt$ 及 $b=p>0$，我们把 s 换成 $s+p$：

$$\boxed{\mathcal{L}[\mathrm{e}^{-pt}\cos qt](s)=\frac{s+p}{(s+p)^2+q^2}}\qquad (s>0).$$

验算

- 令 $p\to 0$ 及 $q=1$，得 $s/(s^2+1)$，即第 1 步中 $\cos t$ 的变换。令 $q\to 0$，得 $1/(s+p)$，而事实上 $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s+p)t}\,\mathrm{d}t=1/(s+p)$。
- 当 $s\to\infty$ 时，$sF(s)\to 1=\cos 0$，这是必然的：当 s 很大时，权重 $s\mathrm{e}^{-st}$ 集中在 $t=0$ 附近，所以 $sF(s)$ 趋向函数在 0 处的值。
- 数值上，取 $s=1$、$p=\frac{1}{2}$、$q=2$，公式给出 $1.5/6.25=0.24$，而对该积分使用辛普森法则（Simpson's rule）所得的结果与此吻合。电脑亦在随机选取的参数值下验证了 (i) 至 (iv) 及最终答案，误差在 10^{-12} 以内。

常见错误

- 在 (ii) 中，遗漏了由 $\mathrm{d}t=\mathrm{d}u/a$ 而来的因子 $1/a$，或把 $F(s/a)$ 写成 $F(as)$。
- 在第 3 步中，只平移了部分的 s：每一个 s 都要变成 $s+p$，所以分子是 $s+p$，而不是 s。
- 在 (iii) 中弄错 $f(0)$ 的正负号：边界项是 $0-f(0)$。

STEP 之外

这些法则正是以拉普拉斯变换法求解微分方程（differential equation）的核心：(iii) 把求导变成乘以 s，于是一条常系数线性常微分方程（linear ODE with constant coefficients）就变成关于 $F(s)$ 的代数方程，你把它解出来，然后在一个由本题这类结果编成的表中“查表”即可。平移法则 (i) 正好解释了为甚么阻尼振荡（damped oscillation）$\mathrm{e}^{-pt}\cos qt$ 会表现为位于 $s=-p\pm \mathrm{i}q$ 的极点（pole）。Boyce 与 DiPrima 合著的 *Elementary Differential Equations*（常微分方程入门教材）有一整章讲述这个方法。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。