详细解答

STEP III 2009，第 3 题

纯数学 · 极限与曲线描绘

STEP III 2009，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/09-s3-q3

关键思路

这个函数在 $t = 0$ 处没有定义，纯粹是因为出现了 $0/0$，所以幂级数（power series）可以告诉我们它在该处“应该”取甚么值。第 (ii) 部分只需把各项通分，写在公分母（common denominator）之上；当中出现的偶函数（even function）其实就是乔装了的 $\frac{t}{2}\coth\frac{t}{2}$。至于第 (iii) 部分，$f'(t)$ 的正负完全取决于它的分子，而这个分子恰好就是 $\mathrm{e}^t(1-t)-1$，这正是题目给出该不等式的原因。

解答

第 (i) 部分

利用 $\mathrm{e}^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \cdots$，当 $t \neq 0$ 时可以约去一个因子 t：

$$f(t) = \frac{t}{t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \cdots} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{6}t^2 + \cdots} \longrightarrow 1 \quad \text{当} t \to 0,$$

因为分母趋向 1。所以 $\lim_{t\to 0} f(t) = 1$。

由商法则（quotient rule），

$$f'(t) = \frac{(\mathrm{e}^t - 1) - t\,\mathrm{e}^t}{(\mathrm{e}^t - 1)^2}.$$

分子和分母都趋向 0，所以把两者分别展开。分子是

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^t - 1 - t\,\mathrm{e}^t &= (t + \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{6}t^3 + \cdots) - (t + t^2 + \tfrac{1}{2}t^3 + \cdots) \\ &= -\tfrac{1}{2}t^2 - \tfrac{1}{3}t^3 + \cdots,\end{aligned}$$

而分母是 $(t+\frac{1}{2}t^2+\cdots)^2 = t^2(1+\frac{1}{2}t+\cdots)^2$。把分子和分母同除以 t^2，

$$f'(t) = \frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}t+\cdots}{(1+\frac{1}{2}t+\cdots)^2} \longrightarrow -\frac{1}{2} \quad \text{当} t \to 0.$$

第 (ii) 部分

设 $g(t) = f(t) + \frac{1}{2}t$。通分后，

$$g(t) = \frac{t}{\mathrm{e}^t - 1} + \frac{t}{2} = \frac{2t + t(\mathrm{e}^t - 1)}{2(\mathrm{e}^t - 1)} = \frac{t\,(\mathrm{e}^t + 1)}{2(\mathrm{e}^t - 1)}.$$

现在以 $-t$ 代替 t，再把分子和分母同乘以 e^t：

$$g(-t) = \frac{-t\,(\mathrm{e}^{-t} + 1)}{2(\mathrm{e}^{-t} - 1)} = \frac{-t\,(1 + \mathrm{e}^t)}{2(1 - \mathrm{e}^t)} = \frac{t\,(\mathrm{e}^t + 1)}{2(\mathrm{e}^t - 1)} = g(t).$$

所以 $f(t) + \frac{1}{2}t$ 是偶函数，正如题目所求。（把分子和分母同除以 $\mathrm{e}^{t/2}$，可见 $g(t) = \frac{t}{2}\coth\frac{t}{2}$，是两个奇函数（odd function）之积，这是另一个看出此结果的方法。）

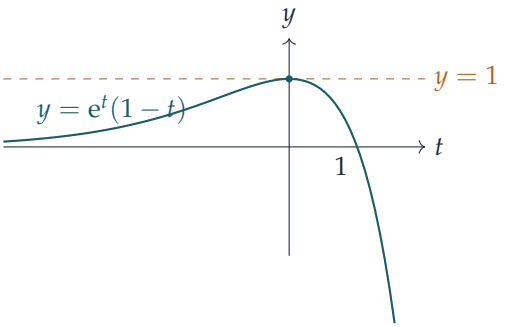
这对绘画草图有一个有用的推论：$f(t) - f(-t) = -t$，所以 f 的图像就是一个偶函数的图像被直线 $y = -\frac{1}{2}t$ 倾斜而成。

第 (iii) 部分

设 $h(t) = \mathrm{e}^t(1-t)$。则

$$h'(t) = \mathrm{e}^t(1-t) - \mathrm{e}^t = -t\,\mathrm{e}^t,$$

它在 $t < 0$ 时为正，在 $t > 0$ 时为负。所以 h 一直递增至 $t = 0$，其后递减：它唯一的转向点（turning point）是极大点，$h(0) = 1$。此外，当 $t \to -\infty$ 时 $h(t) \to 0$，而当 $t > 1$ 时 $h(t) < 0$。



曲线在 $t = 0$ 处与 $y = 1$ 相切，在其余各处都严格位于其下方，所以

$$\mathrm{e}^t(1-t) \le 1, \quad \text{等号成立当且仅当} t = 0.$$

想一想 这个不等式怎样告诉我们有关 $f'(t)$ 的信息?

再看一次第 (i) 部分中 $f'(t)$ 的分子:

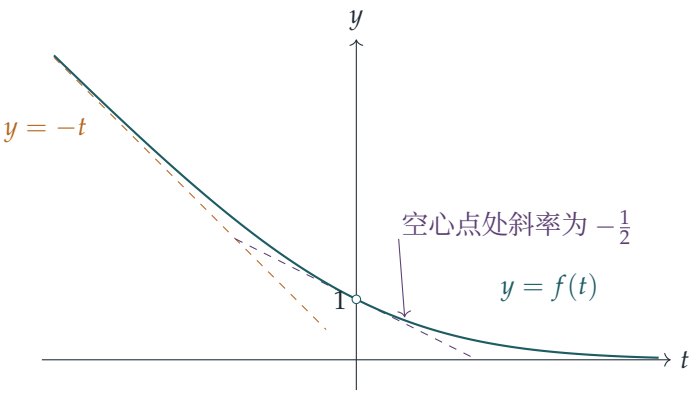
$$e^t - 1 - te^t = e^t(1-t) - 1.$$

根据上面的严格不等式，当 $t \neq 0$ 时它严格为负。分母 $(e^t-1)^2$ 在 $t \neq 0$ 时严格为正。因此对所有 $t \neq 0$ 都有 $f'(t) < 0$；特别地，$f'(t) \neq 0$，所以 f 没有驻点（stationary point），并且在 0 的两侧都是递减的。

f 的草图

把各项事实整理如下。

- 对所有 $t \neq 0$ 都有 $f(t) > 0$，因为 t 与 $e^t - 1$ 同号。
- 在 0 附近，图像以斜率 $-\frac{1}{2}$ 趋近 $(0,1)$（第 (i) 部分）；该点本身并不在图像上，因为 $f(0)$ 没有定义。
- f 处处递减（第 (iii) 部分）。
- 当 $t \to \infty$ 时，$f(t) = t/(e^t-1) \to 0^+$，因为指数函数的增长胜过 t。
- 当 $t \to -\infty$ 时，$f(t) + t = \dfrac{te^t}{e^t-1} \to 0$，所以 $y = -t$ 是一条斜渐近线（oblique asymptote）。这也可由第 (ii) 部分得出：$f(t) = f(-t) - t$ 而 $f(-t) \to 0$。



验算

- 第 (ii) 部分预测 $f(-1) - f(1) = 1$。以数值计算，$f(1) = 1/(e-1) \approx 0.58198$ 而 $f(-1) = e/(e-1) \approx 1.58198$，两者之差恰好是 1。

- 把 $t = \pm 10^{-4}$ 代入导数公式，得 -0.49998 和 -0.50002，与极限 $-\frac{1}{2}$ 吻合。
- 由 coth 的形式可得，当 t 很小时 $g(t) \approx 1 + \frac{1}{12}t^2$，所以 $f(t) \approx 1 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{12}t^2$，与第 (i) 部分的两个极限都相符。

常见错误

- 对 $f'(t)$ 用了一次洛必达法则（L'Hôpital's rule）后，遇到另一个 $0/0$ 便停下来。把分子和分母都展开至 t^2 阶，就可避免这个问题。
- 只证明了 $\mathrm{e}^t(1-t) \leq 1$，便声称 $f'(t) \neq 0$。你需要该不等式在 $t \neq 0$ 时是严格的，而这是由 $t = 0$ 是 h 唯一的驻点得出的。
- 绘画草图时把 $(0,1)$ 画成实心点：f 在该处并无定义。

STEP 之外

展开式 $\dfrac{t}{\mathrm{e}^t - 1} = \sum_{n \geq 0} B_n \dfrac{t^n}{n!}$ 定义了伯努利数（Bernoulli numbers）B_n。第 (i) 部分表明 $B_0 = 1$ 和 $B_1 = -\frac{1}{2}$，而第 (ii) 部分表明对每个奇数 $n \geq 3$ 都有 $B_n = 0$。这些数出现在欧拉－麦克劳林求和公式（Euler–Maclaurin summation formula）、幂和 $1^k + 2^k + \cdots + n^k$，以及欧拉（Euler）关于 $\sum 1/n^{2k}$ 的公式之中。把像 $t = 0$ 处那样的“洞”补上，正是可去奇点（removable singularity）的概念；若想看极限与连续性的严谨论述，可阅读 Abbott 的 *Understanding Analysis*。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。