详细解答

STEP III 2009，第 2 题

纯数学 · 幂级数解

> **STEP III 2009，第 2 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/09-s3-q2

关键思路

若 y 是幂级数（power series），则 y'、y'' 和 x^3y 也是幂级数，而微分方程（differential equation）所说的，就是把它们合并而成的一个幂级数恒等于零。一个对所有 x 都等于零的幂级数，每个系数（coefficient）都必定是零，于是微分方程就化为一连串联系各个 a_n 的简单方程。真正要下工夫的是整理工作：在比较系数之前，先把求和指标平移，使每个级数都以 x 的同一个幂写出。

解答

第 (i) 部分

逐项求导（term-by-term differentiation）（题目已说明所有级数均收敛，所以我们视此做法为可行），

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a_n x^n) = n a_n x^{n-1}.$$

$n = 0$ 的一项 a_0 是常数，其导数为 0，所以求和由 $n = 1$ 开始：

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

这就是所要求的结果。再做一次，y' 中 $n = 1$ 的一项 a_1 是常数，所以

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

逐项写出至 a_3：

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots,$$
$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots,$$
$$y'' = 2a_2 + 6a_3x + \cdots.$$

第 (ii) 部分

我们把 $xy'' - y' + 4x^3y$ 的每一项都写成以 x^{n-1} 表示的级数。首先，

$$xy'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1}.$$

这个和式中 $n = 1$ 的一项本应是 $1 \cdot 0 \cdot a_1 = 0$，所以也可以让它由 $n = 1$ 开始。于是

$$xy'' - y' = \sum_{n=1}^{\infty} [n(n-1) - n]a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-2)a_n x^{n-1}.$$

至于最后一项，$4x^3y = \sum_{m=0}^{\infty} 4a_m x^{m+3}$，代入 $m = n - 4$ 便可令幂次变成 x^{n-1}：

$$4x^3y = \sum_{n=4}^{\infty} 4a_{n-4}\, x^{n-1}.$$

想一想 为甚么我们可以比较系数?

方程说的是：在级数收敛的区间内，对每一个 x 都有 $xy'' - y' + 4x^3y = 0$，所以合并后的幂级数在该区间上是零函数。一个收敛的幂级数若在某区间上恒等于零，则它的所有系数必定都是零（代入 $x = 0$ 得出常数项，除以 x，然后重复这个步骤）。因此 x 的每个幂的系数都必须等于零。

各系数如下：

- x^0（$n = 1$）：$1 \cdot (-1)\, a_1 = 0$，所以 $a_1 = 0$，正如所求。
- x^1（$n = 2$）：$2 \cdot 0 \cdot a_2 = 0$，此式自动成立，所以 a_2 可任意取值。
- x^2（$n = 3$）：$3 \cdot 1 \cdot a_3 = 0$，所以 $a_3 = 0$。
- x^{n-1}，其中 $n \geq 4$：$n(n-2)a_n + 4a_{n-4} = 0$。

由于当 $n \geq 4$ 时 $n(n-2) \neq 0$，我们可以除以它，从而得到

$$a_n = -\frac{4}{n(n-2)}\, a_{n-4} \qquad (n \geq 4),$$

正如所求。（a_0 也可任意取值，因为没有任何方程单独涉及它。）

$a_0 = 1$、$a_2 = 0$ **的情况**。 这个递推关系（recurrence relation）只把 a_n 与 a_{n-4} 联系起来，所以各系数按 n 模（modulo）4 的余数分成四条链。由 $a_1 = 0$、$a_2 = 0$ 和 $a_3 = 0$ 开始的三条链全部为零，所以只有 a_{4k} 可能不等于零。代入 $n = 4k$，其中 $k \geq 1$，

$$a_{4k} = -\frac{4}{4k(4k-2)}\, a_{4k-4} = -\frac{1}{2k(2k-1)}\, a_{4k-4}.$$

由 $a_0 = 1$ 出发，每一步都乘以 -1，并除以阶乘（factorial）中接下来的两个因数，所以

$$a_{4k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!}.$$

（验算：$a_4 = -\frac{1}{2}$，$a_8 = -\frac{1}{12} \cdot (-\frac{1}{2}) = \frac{1}{24}$。）因此

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{4k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x^2)^{2k}}{(2k)!} = \cos(x^2),$$

这里用到马克劳林级数（Maclaurin series）$\cos u = \sum_k (-1)^k u^{2k}/(2k)!$，并取 $u = x^2$。这就是所要求的结果。

$a_0 = 0$、$a_2 = 1$ **的情况**。 这次由 a_0、a_1 和 a_3 开始的三条链全部为零，只有 a_{4k+2} 保留下来。代入 $n = 4k + 2$，其中 $k \geq 1$，

$$a_{4k+2} = -\frac{4}{(4k+2)\,4k}\, a_{4k-2} = -\frac{1}{(2k+1)\,2k}\, a_{4k-2},$$

再由 $a_2 = 1$ 得 $a_{4k+2} = (-1)^k/(2k+1)!$。所以

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{4k+2}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x^2)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sin(x^2).$$

验算

直接代入。对于 $y = \sin(x^2)$，有 $y' = 2x\cos(x^2)$ 和 $y'' = 2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2)$，所以

$$xy'' - y' + 4x^3 y = 2x\cos(x^2) - 4x^3\sin(x^2) - 2x\cos(x^2) + 4x^3\sin(x^2) = 0.$$

$\cos(x^2)$ 的情况亦同样成立。数值上，余弦级数在 $x = 1.2$ 处的首 4o 项之和为 0.1304237…，与 $\cos(1.44)$ 吻合。此外，两个答案在 $x = 0$ 处都合理：$\cos 0 = 1 = a_0$，而在 0 附近 $\sin(x^2) \approx x^2$，所以 $a_2 = 1$。

常见错误

- 未平移指标就比较系数，以致把一个级数中的 a_n 与另一个级数中的 a_n 配对，尽管它们所乘的是 x 的不同幂。

- 忘记 $a_3 = 0$，而这正是消去 $a_3, a_7, a_{11}, \ldots$ 这条链所必需的。
- 除以 $n(n-2)$ 时没有指出它在 $n \geq 4$ 时不等于零。当 $n = 2$ 时它等于零，这正是 a_2 可任意取值的原因。

STEP 之外

这是弗罗贝尼乌斯方法（method of Frobenius）最简单的形式。点 $x = 0$ 是这个方程的正则奇点（regular singular point），因为 y'' 的系数在该处等于零；一般理论解释了为甚么单凭一个普通的幂级数在这里行得通，而在别的情况下有时却会失败（指标根（indicial roots）0 和 2 相差一个整数）。同样的方法可以得出贝塞尔函数（Bessel functions）和勒让德函数（Legendre functions）。要严格论证逐项求导的合理性，需要用到一致收敛（uniform convergence），那是大学一年级分析课的内容。关于这两个课题，可参阅 Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（微分方程入门教材），以及 Abbott 的 *Understanding Analysis*（数学分析入门教材）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。