详细解答

STEP III 2009，第 12 题

概率与统计 · 概率生成函数

> **STEP III 2009，第 12 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/09-s3-q12

关键思路

在第 (i) 部分，每掷一轮，硬币数目的期望值（expectation）便减半，但掷的次数本身是随机的，所以我们以它为条件（conditioning）：已知上一轮的数目，下一轮的数目便服从二项分布（binomial distribution），其平均值很容易求得。这样各个期望值便构成一个等比数列（geometric sequence）。在第 (ii) 部分，总数是若干个独立同分布（independent, identically distributed）部分之和，而概率生成函数（probability generating function）可把“独立变量之和”化为“生成函数之积”。

解答

第 (i) 部分

每次掷出正面的概率为 $\frac{1}{2}$，且各次独立，所以 $X_1 \sim \mathrm{B}(k, \frac{1}{2})$，并且

$$\mathrm{E}(X_1) = \tfrac{1}{2}k.$$

已知 $X_1 = x_1$ 时，Albert 会重新掷 x_1 次，各次互相独立，所以 $X_2 \mid X_1 = x_1 \sim \mathrm{B}(x_1, \frac{1}{2})$，并且

$$\mathrm{E}(X_2 \mid X_1 = x_1) = \tfrac{1}{2}x_1.$$

（若 $x_1 = 0$，他一次也不掷，$X_2 = 0$，与上式吻合。）对 X_1 所有可能的取值求平均，由全期望定律（law of total expectation）得

$$\mathrm{E}(X_2) = \sum_{x_1=0}^{k} \mathrm{E}(X_2 \mid X_1 = x_1)\,\mathrm{P}(X_1 = x_1) = \tfrac{1}{2}\sum_{x_1=0}^{k} x_1\,\mathrm{P}(X_1 = x_1) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{E}(X_1) = \tfrac{1}{4}k,$$

正如所求。

想一想 为甚么不能直接说“X_2 服从 $\mathrm{B}(\frac{1}{2}k, \frac{1}{2})$”?

因为第二轮掷的次数是随机变量（random variable）X_1，而不是数值 $\frac{1}{2}k$；事实上 $\frac{1}{2}k$ 甚至不一定是整数。以 X_1 为条件，掷的次数才得以固定，这时才可以使用二项分布的平均值。

完全相同的论证适用于每一个阶段：已知 $X_i = x_i$ 时，$X_{i+1} \sim \mathrm{B}(x_i, \frac{1}{2})$，所以 $\mathrm{E}(X_{i+1}) = \frac{1}{2}\mathrm{E}(X_i)$。由归纳法（induction）得

$$\mathrm{E}(X_i) = \frac{k}{2^i} \qquad (i \geq 1),$$

再把这个等比级数（geometric series，公比为 $\frac{1}{2}$）求和，得

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{E}(X_i) = k\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \cdots\right) = k.$$

第 (ii) 部分

就一枚硬币而言，$Y_i = n$ 表示先掷出 n 次正面，然后掷出一次反面，所以

$$\mathrm{P}(Y_i = n) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \cdot \tfrac{1}{2} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

它的概率生成函数是一个等比级数，在 $|t| < 2$ 时收敛（convergent）：

$$G_{Y_i}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1} t^n = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}t} = \frac{1}{2 - t}.$$

这 k 枚硬币是分开掷的，所以 $Y_1, \ldots, Y_k$ 互相独立，而独立变量之和的生成函数等于各自生成函数之积。因此

$$G_Y(t) = \mathrm{E}(t^{Y_1 + \cdots + Y_k}) = \prod_{i=1}^{k} \mathrm{E}(t^{Y_i}) = (2 - t)^{-k}.$$

平均值与方差（variance）。 求导数，得

$$G_Y'(t) = k(2 - t)^{-k-1}, \qquad G_Y''(t) = k(k+1)(2 - t)^{-k-2},$$

所以 $G_Y'(1) = k$ 及 $G_Y''(1) = k(k+1)$。因此

$$\mathrm{E}(Y) = G_Y'(1) = k,$$

而且，由于 $G_Y''(1) = \mathrm{E}(Y(Y-1))$，

$$\mathrm{Var}(Y) = G_Y''(1) + G_Y'(1) - (G_Y'(1))^2 = k(k+1) + k - k^2 = 2k.$$

分布。 $\mathrm{P}(Y=r)$ 是 $G_Y(t)$ 中 t^r 的系数。写成

$$G_Y(t) = 2^{-k}\left(1-\tfrac{1}{2}t\right)^{-k},$$

并使用负指数的二项级数（binomial series，在 $|t|<2$ 时成立）：

$$(1-x)^{-k} = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{k+r-1}{r}x^r.$$

（其系数为 $\dfrac{k(k+1)\cdots(k+r-1)}{r!}$，即 $\binom{k+r-1}{r}$。）取 $x=\frac{1}{2}t$，得

$$\mathrm{P}(Y=r) = \binom{k+r-1}{r}\frac{1}{2^{k+r}}, \qquad r=0,1,2,\ldots$$

> **想一想** 有没有方法可以直接看出这条公式?

有。设想把所有掷币结果排成一长列：$Y=r$ 表示第 k 次反面出现在第 $k+r$ 次掷币。这样一个由 $k+r$ 次掷币组成的特定序列，概率为 $2^{-(k+r)}$，而最后一次必定是反面，所以我们只需选择首 $k+r-1$ 次掷币中哪 r 次是正面：共有 $\binom{k+r-1}{r}$ 种方法。这就是负二项分布（negative binomial distribution）。

验算

- 当 $k=1$ 时，$\mathrm{P}(Y=r)=2^{-(r+1)}$，即单一硬币的几何分布（geometric distribution），而 $\mathrm{E}(Y)=1$、$\mathrm{Var}(Y)=2$，正是 $p=\frac{1}{2}$、由 0 起计的几何变量为人熟悉的数值。
- $G_Y(1)=1$，这是每个生成函数都必须满足的。
- 当 $k=2$ 时，$\mathrm{P}(Y=0)=\frac{1}{4}$（两枚硬币第一次都掷出反面），而 $\mathrm{P}(Y=1)=\binom{2}{1}\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$（一枚硬币先正面后反面，另一枚掷出反面：有两种次序，每种的概率为 $\frac{1}{8}$）。
- 以分数作精确计算，已核实对于 $k\le 7$ 及 $i<40$ 有 $\mathrm{E}(X_i)=k/2^i$（所以部分和趋近 k），并且对于 $k\le 6$，$\mathrm{P}(Y=r)$ 的公式、平均值 k 及方差 $2k$ 均正确。

常见错误

- 取 $\mathrm{P}(Y_i=n)=(\frac{1}{2})^n$，忘记了最后的那次反面；这样各概率之和便是 2。
- 使用 $\mathrm{Var}(Y)=G''(1)-\big(G'(1)\big)^2$，漏了 $G'(1)$ 一项，结果得出 k 而不是 $2k$。
- 把系数写成 $\binom{k+r}{r}$：最后一次掷币已固定为反面，所以只有 $k+r-1$ 次掷币可以自由选择。

STEP 之外

第 (i) 部分是一个分支过程（branching process）：每个“个体”（一次正面）在下一代有随机数目的“后代”，这里后代数目服从 $\mathrm{B}(1, \frac{1}{2})$，而由于后代数目的平均值小于 1，这个族群终会灭绝。取条件的那一步 $\mathrm{E}(X_{i+1}) = \mathrm{E}\big(\mathrm{E}(X_{i+1} \mid X_i)\big)$ 就是塔性质（tower property），而在大学一年级的课程中，会证明 X_i 的生成函数是后代生成函数的 i 重复合（composition）。Grimmett 与 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率入门教科书）对生成函数和分支过程均有论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。