详细解答

STEP III 2009，第 11 题

力学 • 变质量运动

STEP III 2009，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/09-s3-q11

关键思路

当质量会改变时，$F = ma$ 并不是正确的定律：我们必须使用“力 = 动量（momentum）的变化率”。尘埃本身是静止的，所以它没有带来任何动量，而彗星的动量 $M(1+bx)v$ 只会因外力而改变。这样马上便得到一个首次积分（first integral）。再写成 $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$，它就变成一条可分离变量方程（separable equation），其解是一条关于 x 的二次方程。

解答

我们把彗星视为一个质点（particle）。它所收集的尘埃原本是静止的，所以不会为彗星带来动量，而作用于整个系统（彗星加上已收集的尘埃）的唯一的力，就是沿运动方向的引力 Mf。

第 (i) 部分

当 $f = 0$ 时没有外力，所以动量守恒（conserved）。进入尘埃云时动量为 MV；在时间 t 时动量为 $M(1+bx)v$。因此

$$(1+bx)\,v = V.$$

现在代入 $v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 并分离变量：

$$\int_0^x (1+bu)\,\mathrm{d}u = \int_0^t V\,\mathrm{d}s \quad\Longrightarrow\quad x + \tfrac{1}{2}bx^2 = Vt,$$

其中用到了 $x = 0$ 当 $t = 0$。所以 $bx^2 + 2x - 2Vt = 0$，而由于 $x \geq 0$，我们要取平方根为正的那个根：

$$x = \frac{\sqrt{1+2bVt} - 1}{b}.$$

第 (ii) 部分

现在外力是 Mf，所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[M(1+bx)v] = Mf.$$

由于 M 和 f 都是常数，由 0 积分至 t 可得 $M(1+bx)v - MV = Mft$（在 $t=0$ 时，$x=0$ 且 $v=V$）。因此

$$v = \frac{ft+V}{1+bx},$$

这正是所求。

? **想一想** 为甚么我们不能直接写 $M(1+bx)\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = Mf$?

那条方程忽略了把每一粒新尘埃由静止加速至速率 v 所需的动量。积法则（product rule）显示出两者的分别：动量的变化率是 $M(1+bx)\dot{v} + Mb\dot{x}v$，而第二项正正就是这个“追上去”的代价。

与第 (i) 部分一样，写成 $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 并分离变量：

$$\int_0^x (1+bu)\,\mathrm{d}u = \int_0^t (fs+V)\,\mathrm{d}s \quad\Longrightarrow\quad x + \tfrac{1}{2}bx^2 = \tfrac{1}{2}ft^2 + Vt.$$

所以 $bx^2 + 2x - (ft^2 + 2Vt) = 0$，再次取非负根，得

$$x = \frac{\sqrt{1+bft^2+2bVt}-1}{b}.$$

（设 $f=0$ 便回到第 (i) 部分的结果。）

恒定速率。彗星以恒定速率 V 运动，当且仅当对所有 t 都有 $x = Vt$，即 $\sqrt{1+bft^2+2bVt} = 1+bVt$。两边平方，这要求

$$1+bft^2+2bVt = 1+2bVt+b^2V^2t^2 \quad \text{对所有}t,$$

而这恰好在 $f = bV^2$ 时成立。此时 $v = \dfrac{bV^2t+V}{1+bVt} = V$，所以在这个选择下彗星确实以恒定速率运动：引力刚好提供了加速它所扫起的尘埃所需的动量。

极限速率。一般而言，利用由 x 的公式得出的 $1+bx = \sqrt{1+bft^2+2bVt}$，

$$v = \frac{ft+V}{\sqrt{1+2bVt+bft^2}} = \frac{f+V/t}{\sqrt{bf+2bV/t+1/t^2}} \longrightarrow \frac{f}{\sqrt{bf}} = \sqrt{\frac{f}{b}} \quad \text{当}t\to\infty,$$

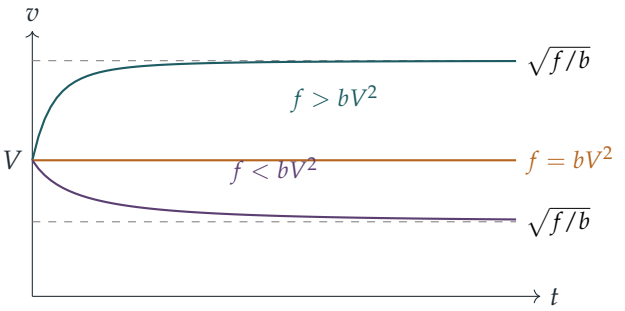
其中我们把分子和分母同除以 $t>0$，并用到了 $bf>0$（我们需要 $f>0$，因为力是沿运动方向作用的）。所以速率趋向常数 $\sqrt{f/b}$。

想一想 这与恒定速率的情况一致吗?

一致：若 $f = bV^2$，则 $\sqrt{f/b} = V$，即彗星一直以来的速率。事实上，对 v^2 求导可得

$$\frac{\mathrm{d}(v^2)}{\mathrm{d}t} = \frac{2(ft+V)(f-bV^2)}{(1+2bVt+bft^2)^2},$$

所以若 $f > bV^2$，速率会稳步上升趋向 $\sqrt{f/b}$；若 $f < bV^2$，速率会稳步下降趋向它；若 $f = bV^2$，速率则保持为 V。



验算

- 单位：b 的单位是 1/长度，而 f 是加速度，所以 f/b 的单位是速率的平方，$\sqrt{f/b}$ 则是速率；bft^2 和 bVt 都是无量纲（dimensionless）的，在平方根内也必须如此。
- 取 $b = 1$、$V = 1$、$f = 3$，以数值方法逐步计算方程 $\dot{x} = p/(1+bx)$、$\dot{p} = f$，结果与 x 和 v 的公式吻合至小数点后八位，而在 $t = 10^6$ 时速率为 $1.7320508\ldots \approx \sqrt{3}$。
- 当 $b \to 0$（没有尘埃）时，$x = \left(\sqrt{1+bft^2+2bVt} - 1\right)/b \to \frac{1}{2}ft^2 + Vt$，即常见的匀加速结果。

常见错误

- 对质量正在改变的物体使用 (质量) $\times\, \dot{v} =$ 力。
- 取了二次方程的负根，结果得出 $x < 0$。
- 对动量方程积分时，忘记了积分常数（constant of integration）MV。

STEP 之外

变质量问题是大学一年级的经典课题：同样的动量帐目可推出火箭方程（rocket equation），而雨点穿过云层下坠时不断增大，所引出的方程也与这里的十分相似。极限速率 $\sqrt{f/b}$ 是一个终端速度（terminal velocity），此时力刚好抵销动量耗用于新增质量的速率。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）对变质量系统有仔细的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。