详细解答

STEP III 2009，第 10 题

力学 • 简谐运动

> **STEP III 2009，第 10 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/09-s3-q10

关键思路

题目给出平衡（equilibrium）时的压缩量 d，是为了让我们无须另外设置弹簧的劲度（stiffness）也能知道它的大小：平衡时弹簧的力与重量互相抵消，所以 $k/m = g/d$。之后，由牛顿第二定律（Newton's second law）可知，运动是以平衡位置为中心的简谐运动（simple harmonic motion），而下落高度 h 只通过初速度影响结果。当弹簧再也无法推动质点时，质点便离开弹簧，这发生在压缩量回到零的一刻。

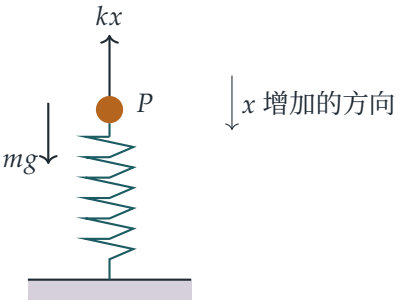
解答

微分方程

把 P 视为质量为 m 的质点（particle），弹簧视为轻弹簧（light spring），服从胡克定律（Hooke's law），劲度为 k，并忽略空气阻力。当 P 静止在弹簧上时，作用于它的力是向下的重量 mg 和向上的弹簧力 kd，所以

$$kd = mg, \qquad \text{即} \qquad \frac{k}{m} = \frac{g}{d}.$$

现在考虑质点从高处落下的情况。取 x 向下为正（它就是压缩量），并以碰到弹簧的一刻为 $t = 0$。当 P 与弹簧接触时，作用于它的力如图所示。



由于弹簧是轻的，它施于 P 的力恰好是向上的 kx（轻弹簧会把两端所受的力原封不动地传递过去）。取向下为正，由牛顿第二定律得 $m\ddot{x} = mg - kx$，所以

$$\ddot{x} + \frac{g}{d}x = g, \qquad 0 \le t \le T.$$

解方程

这是以 $x = d$ 为中心的简谐运动，其中

$$\omega = \sqrt{g/d}.$$

常数 $x = d$ 是一个特解（particular solution），而余函数（complementary function）是 $B\cos\omega t + C\sin\omega t$，所以通解（general solution）是

$$x = d + B\cos\omega t + C\sin\omega t.$$

初始条件（initial conditions）来自下落的过程。在 $t = 0$ 时质点刚刚碰到弹簧，所以 $x(0) = 0$；而 P 已自由下落了高度 h，所以它的速率是 $\sqrt{2gh}$，方向向下，亦即 x 增加的方向。因此

$$\begin{aligned} x(0) = d + B = 0 \quad &\Rightarrow \quad B = -d, \\ \dot{x}(0) = C\omega = \sqrt{2gh} \quad &\Rightarrow \quad C = \sqrt{2gh}\,\sqrt{d/g} = \sqrt{2hd}. \end{aligned}$$

所以

$$x = d - d\cos\omega t + \sqrt{2hd}\,\sin\omega t, \qquad A = d, \quad B = -d, \quad C = \sqrt{2hd}, \quad \omega = \sqrt{g/d}.$$

分离的时刻

? **想一想** P 究竟在甚么时候失去接触?

弹簧并没有系在 P 上，所以它只能推，不能拉。作用于 P 的接触力就是弹簧力 kx，当 $x > 0$ 时它保持为正，而当 x 回到 0 时它降至零，此时 P 正在向上运动。假如运动越过这

一点后仍按原来的方程进行，弹簧便要提供向下的拉力，但它做不到。所以 T 是使 $x = 0$ 的第一个正的时刻。

要求出这个时刻，可把振动的部分写成单一个余弦。设 $R = \sqrt{d^2 + 2hd}$，并以下式定义锐角 φ：

$$\cos\varphi = \frac{d}{R}, \qquad \sin\varphi = \frac{\sqrt{2hd}}{R},$$

于是 $\tan\varphi = \sqrt{2h/d}$，而 $\varphi = \arctan\sqrt{2h/d}$。那么 $d\cos\omega t - \sqrt{2hd}\sin\omega t = R\cos(\omega t + \varphi)$，并且

$$x = d - R\cos(\omega t + \varphi).$$

所以 $x = 0$ 当且仅当 $\cos(\omega t + \varphi) = d/R = \cos\varphi$。当 t 由 0 开始增加时，角 $\omega t + \varphi$ 由 φ 出发，而在区间 $\varphi < \omega t + \varphi < 2\pi - \varphi$ 上有 $\cos(\omega t + \varphi) < \cos\varphi$，所以在该处 $x > 0$。余弦值第一次回到 $\cos\varphi$ 是在

$$\omega T + \varphi = 2\pi - \varphi, \qquad \text{即} \qquad \omega T = 2\pi - 2\varphi.$$

除以 $\omega = \sqrt{g/d}$，得

$$T = \sqrt{d/g}\left(2\pi - 2\arctan\sqrt{2h/d}\right),$$

这正是所求的结果。

验算

- 若 $h = 0$，质点是以零速率放在处于自然长度（natural length）的弹簧上，此时 $\varphi = 0$，而 $T = 2\pi\sqrt{d/g}$：刚好是一个完整的周期（period），之后 P 以零速率回到最高点。这完全正确。
- 当 $h \to \infty$ 时，$\varphi \to \frac{\pi}{2}$ 而 $\omega T \to \pi$：速度极快的质点只在弹簧上停留半个周期，因为与振幅（amplitude）相比，平衡位置的偏移 d 变得微不足道。
- 根据能量守恒（energy conservation），P 离开时的速率应为 $\sqrt{2gh}$。事实上 $\dot{x}(T) = R\omega\sin(2\pi - \varphi) = -R\omega\sin\varphi = -\sqrt{2gh}$。
- 数值上，取 $d = 0.1\,\mathrm{m}$、$h = 0.2\,\mathrm{m}$ 和 $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ 逐步模拟这个运动，得出接触时间为 0.411 s，与公式吻合。随机选取的 d 和 h 值亦吻合至小数点后六位。

常见错误

- 从平衡位置量度位移，却忘记了题目中的 x 是压缩量，结果得出 $A = 0$。
- 把初速率取为 $\sqrt{2gh}$，但正负号弄错了：向下才是 x 增加的方向。

- 假设分离发生在平衡位置 $x = d$，或发生在半个周期之时。其实弹簧会一直推着质点，直至回复自然长度为止。

STEP 之外

这是*单边约束*（unilateral constraint）最简单的例子：弹簧能推而不能拉。运动在不同阶段服从不同的微分方程，而各阶段之间靠位置和速度的吻合来衔接，正如本题中自由下落阶段与弹簧阶段的衔接一样。同样的想法贯穿了碰撞和弹跳系统的理论。想进一步了解振子（oscillator），以及上文验算中所用的那类能量方法，可参阅 Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。