详细解答

STEP III 2009，第 1 题

纯数学 • 圆的坐标几何

STEP III 2009，第 1 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

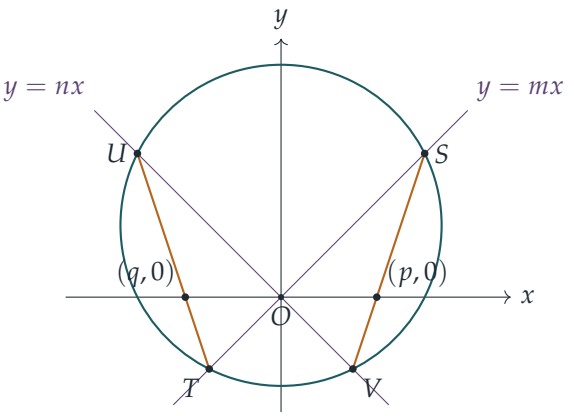
step.maths.org/questions/09-s3-q1

关键思路

四个点全部位于通过原点的直线上，所以每个点都可以用一个数来描述：它的 x 坐标。把圆与直线 $y = mx$ 相交，会得到一条二次方程（quadratic），它的两个根就是 s 和 t；我们始终不需要求出这两个根本身，只需要它们的和与积。最后的恒等式（identity），来自把 $p + q$ 的分子适当分组，使当中只出现 st、$s + t$、uv 和 $u + v$。

解答

在整个解答中，S 和 T 位于直线 $y = mx$ 上，U 和 V 位于 $y = nx$ 上，两条直线都通过原点 O。我们假设 $m \neq n$（否则四个点全在同一条直线上），并假设 SV 和 UT 都不是水平线，使它们确实与 $y = 0$ 相交；即 $ms \neq nv$ 及 $mt \neq nu$。



截距 p 和 q

通过 $S(s, ms)$ 和 $V(v, nv)$ 的直线，斜率（gradient）为 $\dfrac{nv - ms}{v - s}$，所以线上的点满足

$$y - ms = \frac{nv - ms}{v - s}(x - s).$$

代入 $y = 0$ 和 $x = p$，得 $p - s = -\dfrac{ms(v - s)}{nv - ms}$，所以

$$p = \frac{s(nv - ms) - ms(v - s)}{nv - ms} = \frac{nsv - msv}{nv - ms} = \frac{(m - n)sv}{ms - nv},$$

这正是所要求的结果。（若 $v = s$，直线 SV 是铅垂线，所以 $p = s$；公式仍然给出 $\frac{(m-n)s^2}{(m-n)s} = s$。）

直线 UT 把 $y = mx$ 上的 $T(t, mt)$ 与 $y = nx$ 上的 $U(u, nu)$ 连起来，情况与 SV 连接 S 和 V 完全一样。把 s 换成 t，v 换成 u，得

$$q = \frac{(m - n)tu}{mt - nu}.$$

s 和 t 所满足的二次方程

点 (x, mx) 位于 $x^2 + (y - c)^2 = r^2$ 上，当且仅当 $x^2 + (mx - c)^2 = r^2$，即

$$(1 + m^2)x^2 - 2mc\,x + c^2 - r^2 = 0.$$

s 和 t 都满足这条方程。取 S 和 T 为该直线与圆的两个（相异）交点，则 s 和 t 就是方程的两个根，所以根据根与系数的关系（relations between roots and coefficients），

$$st = \frac{c^2 - r^2}{1 + m^2}, \qquad s + t = \frac{2mc}{1 + m^2}.$$

证明 $p + q = 0$

对直线 $y = nx$ 作同样的论证，可知 u 和 v 是 $(1 + n^2)x^2 - 2nc\,x + c^2 - r^2 = 0$ 的两个根，所以

$$uv = \frac{c^2 - r^2}{1 + n^2}, \qquad u + v = \frac{2nc}{1 + n^2}.$$

现在把两个截距通分相加：

$$p + q = (m - n)\,\frac{sv(mt - nu) + tu(ms - nv)}{(ms - nv)(mt - nu)}.$$

? **想一想** 分子同时涉及 s, t, u, v 四个量，我们该怎样把它驯服？

把它展开，再按系数 m 或 n 把各项配对：

$$\begin{aligned} sv(mt-nu)+tu(ms-nv) &= m\,stv - n\,suv + m\,stu - n\,tuv \\ &= m\,st(u+v) - n\,uv(s+t). \end{aligned}$$

现在每一项都是我们已知的对称函数（symmetric function）。代入后，

$$\begin{aligned} m\,st(u+v) - n\,uv(s+t) &= m\cdot\frac{c^2-r^2}{1+m^2}\cdot\frac{2nc}{1+n^2} - n\cdot\frac{c^2-r^2}{1+n^2}\cdot\frac{2mc}{1+m^2} \\ &= \frac{2mnc(c^2-r^2)}{(1+m^2)(1+n^2)} - \frac{2mnc(c^2-r^2)}{(1+m^2)(1+n^2)} = 0. \end{aligned}$$

根据我们的假设，分母 $(ms-nv)(mt-nu)$ 不等于零，所以 $p+q=0$，证明完毕。

验算

如图中所示，取 $c=1$、$r^2=5$、$m=1$、$n=-1$。两条二次方程分别是 $x^2-x-2=0$ 和 $x^2+x-2=0$，所以 $s=2$、$t=-1$，而 $u=-2$、$v=1$。于是 $st=-2=\frac{1-5}{2}$，$s+t=1=\frac{2}{2}$，与预期一致。由 $S(2,2)$ 到 $V(1,-1)$ 的直线斜率为 3，与 $y=0$ 相交于 $p=\frac{4}{3}$，与 $\frac{2\cdot2\cdot1}{2+1}$ 吻合；由 $U(-2,2)$ 到 $T(-1,-1)$ 的直线则相交于 $q=-\frac{4}{3}$。以电脑随机选取 16 000 组圆和直线作检验，每一次 $|p+q|$ 都小于 10^{-12}。

常见错误

- 把点配错：q 来自 U 和 T，所以应作的代换是 $s\to t$、$v\to u$；若改为对调 $s\leftrightarrow v$，得到的仍然是 p。
- 试图直接解二次方程，把 s,t,u,v 明确求出来。平方根会令代数运算无从入手；正是 $m\,st(u+v)-n\,uv(s+t)$ 这个分组，才令整个式子化简为零。

STEP 之外

直线 $y=0$ 与圆相交所成的弦（chord），中点是 O，因为圆心 $(0,c)$ 在 y 轴上。所以这道题其实证明了蝴蝶定理（butterfly theorem）：若两条弦 ST 和 UV 都通过某条弦的中点 O，则 SV 和 UT 与该弦的交点到 O 的距离相等。我们的证明从没用过 $c^2<r^2$，所以即使 O 在圆外，证明依然成立；这暗示了这个结果真正的归宿是射影几何（projective geometry），在那里它是笛沙格（Desargues）对合定理（involution theorem）的一个特例。Coxeter 与 Greitzer 合著的 *Geometry Revisited*（《几何学的新探索》）是进一步阅读的上佳之选。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。