详细解答

STEP II 2009，第 9 题

力学 • 质心

STEP II 2009，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/09-s2-q9

关键思路

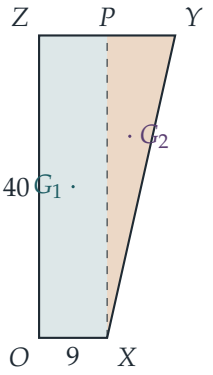
我们需要的每一个距离，都是垂直于同一个固定平面量度的：第 (i) 部分是边 OZ，第 (ii) 部分是水箱的背面，而背面包含 OZ。因此我们由始至终只需要一个坐标。把每个图形分割成质心（centre of mass）已知的若干部分（长方形和一个三角形），对该直线或平面取矩（take moments），再除以总质量。水箱的计算方法相同，只是高了一个层次：它的组成部分是两块梯形（trapezium）和三块长方形的金属薄片，然后再加上一块液体。

解答

第 (i) 部分

取 O 为原点，x 轴沿 OX，y 轴沿 OZ。于是 $X = (9, 0)$，$Z = (0, 40)$，而且由于 YZ 平行于 OX 且长度为 18，故 $Y = (18, 40)$。验算一下：$XY^2 = 9^2 + 40^2 = 1681 = 41^2$，与题目相符。与 OZ 的距离就是 x 坐标。

由 X 作一条平行于 OZ 的直线，与 ZY 相交于 $P = (9, 40)$。这条线把薄片（lamina）分割成长方形 $OXPZ$ 和直角三角形 XYP。



设薄片每 cm^2 的质量为 1，则质量等于面积。

- 长方形 $OXPZ$：面积为 $9 \times 40 = 360$，中心 G_1 位于 $x = 4.5$。
- 三角形 XYP：面积为 $\frac{1}{2} \times 9 \times 40 = 180$。均匀（uniform）三角形的质心位于三个顶点的平均位置，所以 G_2 的 $x = \frac{1}{3}(9 + 18 + 9) = 12$。

整块薄片的面积为 540。对 OZ 取矩，

$$540\,\bar{x} = 360 \times 4.5 + 180 \times 12 = 1620 + 2160 = 3780,$$

所以 $\bar{x} = 7$。质心与 OZ 的距离为 7 cm，正如所求。

第 (ii) 部分

现在设金属薄片每 cm^2 的质量为 1。背面 $OTWZ$ 位于平面 $x = 0$ 上，而由于阔度 d 的方向垂直于两个端面，水箱上每一点的 x 坐标都与第 (i) 部分相同。因此我们对背面取矩。每个长方形的面都是均匀的，所以其质心位于其中心，而该中心的 x 坐标与梯形对应边的中点相同。

组成部分	面积（cm^2）	中心的 x（cm）	矩
两个端面	$2 \times 540 = 1080$	7	7560
底面 $OXUT$	$9d$	4.5	$40.5d$
背面 $OTWZ$	$40d$	0	0
正面 $XUVY$	$41d$	$\frac{1}{2}(9 + 18) = 13.5$	$553.5d$
总计	$1080 + 90d$		$7560 + 594d$

? **想一想** 倾斜的正面，中心在哪里？

正面是一个长方形，其中一对边是 XU 和 YV，分别位于 $x = 9$ 和 $x = 18$。它的中心在两者的正中间，即 $x = 13.5$。计算它的面积时，用的是斜边长度 $XY = 41$，而不是水平阔度 9。

所以空水箱的

$$\bar{x} = \frac{7560 + 594d}{1080 + 90d}.$$

每个系数都可被 18 整除：$7560 = 18 \times 420$，$594 = 18 \times 33$，$1080 = 18 \times 60$，$90 = 18 \times 5$。因此

$$\bar{x} = \frac{420 + 33d}{60 + 5d} = \frac{3(140 + 11d)}{5(12 + d)} \text{ cm},$$

这就是所求的与背面的距离。

注满的水箱

液体注满一个棱柱（prism），其横切面（cross-section）是第 (i) 部分的梯形，长度为 d。它的体积是 $540d$，所以按我们的单位，它的质量是 $540dk$（每单位体积的质量是金属每单位面积质量的 k 倍，而后者我们已取为 1）。每个横切面都是同一个梯形，所以液体的质心位于 $x = 7$，与第 (i) 部分相同。

当 $d = 20$ 时，水箱的质量为 $1080 + 1800 = 2880$，对背面的矩为 $7560 + 594 \times 20 = 19440$。液体的质量为 $10800k$，矩为 $75600k$。所以注满的水箱有

$$\bar{x} = \frac{19440 + 75600k}{2880 + 10800k} = \frac{27 + 105k}{4 + 15k} \text{ cm},$$

其中分子和分母已同时除以 720。这就是注满的水箱的质心与背面的距离。

验算

- 当 $k = 0$（没有液体，或液体的密度可忽略不计）时，答案是 $\frac{27}{4} = 6.75$，而空水箱的公式在 $d = 20$ 时同样得出 $\frac{3 \times 360}{5 \times 32} = 6.75$。
- 当 $k \to \infty$ 时，液体占主导地位，$\bar{x} \to \frac{105}{15} = 7$，即液体本身的质心。
- 答案总是介乎 6.75 与 7 之间，因为它是两者的加权平均（weighted average），理应如此。例如 $k = 1$ 时得出 $\frac{132}{19} \approx 6.947$。
- 数值验算（以鞋带公式（shoelace formula）求梯形的形心（centroid）、以蒙地卡罗（Monte Carlo）方法估算得出 $\bar{x} \approx 6.9994$，以及用精确分数计算两条水箱公式）与以上所有结果吻合。

常见错误

- 计算正面的面积时用了 $9d$ 而不是 $41d$：这个面是倾斜的，所以它的阔度是斜边长度 XY。
- 因为背面的矩为零而把它漏掉。它仍然为总质量贡献 $40d$。
- 只计算一个端面，或者给水箱加上盖。

STEP 之外

这里我们把图形分割成中心已知的若干部分，从而求出质心。在大学里，薄片或立体的质心是用积分来定义的，例如 $\bar{x} = \frac{1}{M}\iint x\,\rho\,\mathrm{d}A$，而“分割成若干部分”的方法，不过是“把区域切成几部分后，积分可以逐部分相加”这个事实而已。同样的积分还可给出转动惯量（moment of inertia），它决定物体如何转动。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）对这两个概念都有严谨细致的阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。