详细解答

STEP II 2009，第 8 题

纯数学 · 向量几何

STEP II 2009，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/09-s2-q8

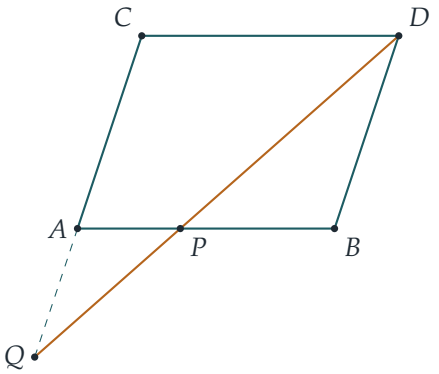
关键思路

把每个定义改写成“从某一点出发，沿着一条边移动若干倍”。于是 $\mathbf{p}-\mathbf{b}=\lambda(\mathbf{a}-\mathbf{b})$ 及 $\mathbf{q}-\mathbf{c}=\mu(\mathbf{a}-\mathbf{c})$，所以长度 BP 和 CQ 不过是 $\lambda\,AB$ 和 $\mu\,AC$，而长度条件就化为一条十分简单的方程。要证明三点共线 (collinear)，只须证明连接它们的其中两个向量 (vector) 平行。

解答

图形

由于 $\mathbf{p}=\mathbf{b}+\lambda(\mathbf{a}-\mathbf{b})$ 且 $0<\lambda<1$，点 P 位于线段 AB 上，严格介乎 A 与 B 之间。由于 $\mathbf{q}=\mathbf{c}+\mu(\mathbf{a}-\mathbf{c})$ 且 $\mu>1$，点 Q 位于直线 CA 上，并在 A 之外：从 C 出发，走到 A，然后继续向前走。下图（以 $\lambda=0.6$ 绘画）亦显示了下文出现的点 D。



求 μ

由上面的改写可得

$$BP = |\mathbf{p}-\mathbf{b}| = \lambda|\mathbf{a}-\mathbf{b}| = \lambda\, AB, \qquad CQ = |\mathbf{q}-\mathbf{c}| = \mu|\mathbf{a}-\mathbf{c}| = \mu\, AC,$$

其中用到 $\lambda > 0$ 和 $\mu > 0$，才可把它们从模（modulus）中抽出。条件 $CQ \times BP = AB \times AC$ 变成 $\lambda\mu\, AB \cdot AC = AB \cdot AC$。由于 A、B、C 是相异的点，$AB \cdot AC \neq 0$，所以

$$\mu = \frac{1}{\lambda}.$$

这确实满足 $\mu > 1$，因为 $0 < \lambda < 1$。

定点 D

设 $\mathbf{d} = -\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$。我们比较 $\overrightarrow{PQ}$ 与 $\overrightarrow{PD}$。首先，

$$\begin{aligned}\mathbf{d}-\mathbf{p} &= -\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}-\lambda\mathbf{a}-(1-\lambda)\mathbf{b}\\ &= -(1+\lambda)\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}+\mathbf{c}.\end{aligned}$$

其次，代入 $\mu = 1/\lambda$，

$$\begin{aligned}\mathbf{q}-\mathbf{p} &= \Big(\frac{1}{\lambda}-\lambda\Big)\mathbf{a}+\Big(1-\frac{1}{\lambda}\Big)\mathbf{c}-(1-\lambda)\mathbf{b}\\ &= \frac{1-\lambda}{\lambda}\Big[(1+\lambda)\mathbf{a}-\lambda\mathbf{b}-\mathbf{c}\Big],\end{aligned}$$

其中用到 $\frac{1}{\lambda}-\lambda = \frac{(1-\lambda)(1+\lambda)}{\lambda}$ 及 $1-\frac{1}{\lambda} = -\frac{1-\lambda}{\lambda}$。

> ? **想一想** 怎样看出这两个向量平行?

方括号内的式子正好是 $-(\mathbf{d}-\mathbf{p})$。所以

$$\mathbf{q}-\mathbf{p} = -\frac{1-\lambda}{\lambda}(\mathbf{d}-\mathbf{p}), \qquad \text{即} \qquad \mathbf{d} = \mathbf{p} - \frac{\lambda}{1-\lambda}(\mathbf{q}-\mathbf{p}).$$

因为 $\lambda \neq 1$，这个系数是有限的；又因为 Q 不在直线 AB 上，所以 $\mathbf{q} \neq \mathbf{p}$。因此 D 位于直线 PQ 上。向量 $\mathbf{d}$ 只涉及 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$，所以对任何 λ 而言这都是同一点，正如题目所求。由于系数 $-\lambda/(1-\lambda)$ 是负数，P 位于 Q 与 D 之间，与图中所见一致。

四边形 $ABDC$

我们有

$$\mathbf{d}-\mathbf{c} = \mathbf{b}-\mathbf{a} \quad \text{及} \quad \mathbf{d}-\mathbf{b} = \mathbf{c}-\mathbf{a},$$

所以 $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ 及 $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$。对边相等且平行，所以 $ABDC$ 是**平行四边形**（parallelogram），而 D 是与 A 相对的顶点。（由于 A、B、C 不共线，这个平行四边形并非退化。）

验算

- 以几何方法覆核：由于 $BD \parallel AC$，三角形 PAQ 与 PBD 相似，所以 $AQ/BD = AP/BP$。这里 $AQ = (\mu-1)AC$、$BD = AC$、$AP = (1-\lambda)AB$ 及 $BP = \lambda AB$，得出 $\mu - 1 = (1-\lambda)/\lambda$，亦即再次得到 $\mu = 1/\lambda$。
- 取 $A = (0,0)$、$B = (4,0)$、$C = (1,3)$ 及 $\lambda = 0.6$（即图中的情况），可得 $P = (1.6,0)$、$Q = (-\frac{2}{3}, -2)$ 及 $D = (5,3)$。QP 与 PD 的斜率同为 $\frac{15}{17}$。
- 我们亦测试了 20,000 个随机抽取的三维三角形。我们以数值方法从长度条件解出 μ，每一次的结果都与 $1/\lambda$ 吻合，误差在 10^{-13} 以内，而且 P、Q、D 共线。

常见错误

- 写成 $BP = (1-\lambda)AB$。在 $\mathbf{p}$ 中 $\mathbf{b}$ 的系数是 $1-\lambda$，但量度与 B 的距离的，却是 A 处的权重。
- 没有检查顶点的次序，就说 $ABDC$ 是“平行四边形”。这里的次序是 $A \to B \to D \to C$，所以 AD 和 BC 是对角线。

STEP 之外

像 $\lambda\mathbf{a} + (1-\lambda)\mathbf{b}$ 这类系数之和为 1 的式子，称为*仿射组合*（affine combination）。它们是描述点（而非向量）的自然语言，而共线是一种仿射性质：它不取决于原点的选择。由此可以进一步认识重心坐标（barycentric coordinates），以及梅涅劳斯定理（Menelaus' theorem）等经典结果；该定理准确描述了一条直线在甚么情况下与三角形的三条边相交。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra* 详细阐述向量方面的内容，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 则有更多 STEP 风格的向量几何题。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。