详细解答

STEP II 2009，第 7 题

纯数学 · 观察法积分

STEP II 2009，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/09-s2-q7

关键思路

这类积分乍看无从入手，直到你发现它们恰好是某个函数的导数（derivative）。第一个结果告诉我们 $(x-a)^n \mathrm{e}^{bx}\sqrt{1+x^2}$ 的导数是甚么模样：$(x-a)$ 的幂、指数函数（exponential）、一个三次多项式（cubic），全部除以 $\sqrt{1+x^2}$。所以每个积分（integral）其实都是一道配对练习：读出 n、a 和 b，再检查三次多项式是否吻合。当分子中的多项式是四次（quartic）而非三次时，我们就要弄清楚多出来的那一次从何而来。

解答

导数

对三个因式的乘积求导，并写出 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{1+x^2} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= n(x-a)^{n-1}\mathrm{e}^{bx}\sqrt{1+x^2} + b(x-a)^n\mathrm{e}^{bx}\sqrt{1+x^2} + (x-a)^n\mathrm{e}^{bx}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{(x-a)^{n-1}\mathrm{e}^{bx}}{\sqrt{1+x^2}}\Big[\,n(1+x^2) + b(x-a)(1+x^2) + x(x-a)\,\Big],\end{aligned}$$

这里我们抽出了公因式 $(x-a)^{n-1}\mathrm{e}^{bx}/\sqrt{1+x^2}$（把首两项各乘以 $\sqrt{1+x^2}$，使它们置于公分母之上）。展开括号，得

$$q(x) = bx^3 + (n+1-ab)x^2 + (b-a)x + (n-ab).$$

由于 $b \neq 0$，x^3 的系数不为零，所以 q 确实是三次多项式。这就是所要求的结果。我们会以下列形式使用它：

$$\int \frac{(x-a)^{n-1}\mathrm{e}^{bx}\,q(x)}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = (x-a)^n\mathrm{e}^{bx}\sqrt{1+x^2} + C. \qquad (*)$$

第 (i) 部分

配对各个因式，我们需要 $a=4$、$b=4$ 和 $n-1=14$，所以 $n=15$。代入这些数值，

$$q(x)=4x^3+(16-16)x^2+(4-4)x+(15-16)=4x^3-1,$$

这正是被积函数（integrand）中的三次多项式。因此由 $(*)$ 得

$$\int \frac{(x-4)^{14}\mathrm{e}^{4x}(4x^3-1)}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x=(x-4)^{15}\mathrm{e}^{4x}\sqrt{1+x^2}+C.$$

第 (ii) 部分

这次的多项式是四次的，所以它不可能直接就是 q。

> ? **想一想** 一个只会产生三次多项式的公式，怎样才能容纳一个四次多项式?

$(*)$ 中 $(x-a)$ 的幂可以由我们选择。如果这个四次多项式有因式 $(x-1)$，我们就可以把它移过去与 $(x-1)^{21}$ 合并，余下一个三次多项式。试代 $x=1$：$12-1-11=0$，所以 $(x-1)$ 确实是因式，除去后得

$$12x^4-x^2-11=(x-1)(12x^3+12x^2+11x+11).$$

（你也可以看出它等于 $(x^2-1)(12x^2+11)$。）因此被积函数是

$$\frac{(x-1)^{22}\mathrm{e}^{12x}(12x^3+12x^2+11x+11)}{\sqrt{1+x^2}}.$$

取 $a=1$、$b=12$、$n=23$：

$$q(x)=12x^3+(24-12)x^2+(12-1)x+(23-12)=12x^3+12x^2+11x+11,$$

两者吻合。故此

$$\int \frac{(x-1)^{21}\mathrm{e}^{12x}(12x^4-x^2-11)}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x=(x-1)^{23}\mathrm{e}^{12x}\sqrt{1+x^2}+C.$$

第 (iii) 部分

多项式同样是四次的，但这次代入 $x=2$ 得 $64+8-2=70\neq 0$，所以 $(x-2)$ 不是因式，第 (ii) 部分的技巧行不通。

> ? **想一想** 如果 $(x-2)$ 不是因式，多出来的那一次从何而来?

数一数次数。被积函数的分子次数是 $6+4=10$，但 $(*)$ 配上 $(x-2)^6$ 只能给出次数 $6+3=9$。答案中若多一个因式 x，次数便会增加一，所以不妨试试对 xy 求导，其中 y

是 $a=2$、$b=4$、$n=7$ 时的函数：

$$y=(x-2)^7\mathrm{e}^{4x}\sqrt{1+x^2},\qquad q(x)=4x^3+(8-8)x^2+(4-2)x+(7-8)=4x^3+2x-1.$$

由积法则（product rule），$(xy)'=y+xy'$。把 y 也置于分母 $\sqrt{1+x^2}$ 之上，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xy)&=\frac{(x-2)^7\mathrm{e}^{4x}(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{x(x-2)^6\mathrm{e}^{4x}(4x^3+2x-1)}{\sqrt{1+x^2}}\\&=\frac{(x-2)^6\mathrm{e}^{4x}}{\sqrt{1+x^2}}\Big[(x-2)(1+x^2)+4x^4+2x^2-x\Big].\end{aligned}$$

由于 $(x-2)(1+x^2)=x^3-2x^2+x-2$，括号内的式子是

$$x^3-2x^2+x-2+4x^4+2x^2-x=4x^4+x^3-2,$$

正是我们想要的四次多项式。因此

$$\int\frac{(x-2)^6\mathrm{e}^{4x}(4x^4+x^3-2)}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x=x(x-2)^7\mathrm{e}^{4x}\sqrt{1+x^2}+C.$$

验算

- 对每个答案求导再作比较：这是最确实的验算方法，而每一次都只是再用一次 $(*)$（第 (iii) 部分另加积法则）。
- 快速数次数：对一个多项式次数为 d 的答案求导（不计平方根和指数函数），所得分子的次数是 $d+2$。在 (i) 中，$15+2=14+3$；在 (ii) 中，$23+2=21+4$；在 (iii) 中，$8+2=6+4$。
- 数值上，以森逊法则（Simpson's rule）计算 (iii) 的积分在 $[-1,1.2]$ 上的值，得 $-104.41424\ldots$，与 $F(1.2)-F(-1)$ 吻合至约 13 位有效数字，其中 $F(x)=x(x-2)^7\mathrm{e}^{4x}\sqrt{1+x^2}$；(i) 和 (ii) 同样吻合得很好。

常见错误

- 忘记 n 比被积函数中的幂大一：在 (i) 中，答案含 $(x-4)^{15}$，而不是 $(x-4)^{14}$。
- 在 (ii) 中，试图直接配对四次多项式，然后断定无解，而没有先把因式 $(x-1)$ 并入。
- 漏写积分常数（constant of integration）。

STEP 之外

这里的方法是“辨认式积分”（integration by recognition）：猜出原函数（antiderivative）的形状，对它求导，然后比较系数。把这个想法写成算法，就成了 Risch 算法（Risch algo-

rithm)；电脑代数系统（computer algebra system）用它来判定一个初等函数（elementary function）是否有初等原函数，若有的话便把它求出来。一个相关的想法，是猜一个带有未知系数、具指定形式的解，这就是求解线性微分方程（linear differential equation）的待定系数法（method of undetermined coefficients），见 Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程教科书）。想找更多 STEP 风格的积分，可参阅 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（进阶数学难题集）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。