详细解答

STEP II 2009，第 6 题

纯数学 · 无穷级数的界限

> **STEP II 2009，第 6 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/09-s2-q6

关键思路

我们无法准确求出 $\sum 1/F_i$ 的和，但可以把它夹在两个界之间。递推关系（recurrence）给出两个简单的比较：每个斐波那契数（Fibonacci number）都小于前一项的两倍，又大于前两项那一个的两倍。第一个比较用一个等比级数（geometric series）从下方界定级数的尾部（tail）。第二个比较则把尾部与它自身平移后的版本联系起来，从而由上方界定它。在使用任何一个界之前先准确地加起若干项，就可以把估计收紧到我们想要的程度。

解答

把相邻两项逐对相加，得

$$F_3 = 2, \quad F_4 = 3, \quad F_5 = 5, \quad F_6 = 8, \quad F_7 = 13, \quad F_8 = 21, \quad F_9 = 34, \quad F_{10} = 55.$$

所有 F_n 均为正数，而且当 $n \geq 2$ 时 $F_{n+1} = F_n + F_{n-1} > F_n$，所以数列由 F_2 起严格递增（strictly increasing）。

级数收敛。 当 $i \geq 4$ 时，$F_i = F_{i-1} + F_{i-2} > 2F_{i-2}$，因为当 $i - 2 \geq 2$ 时 $F_{i-1} > F_{i-2}$。由于 $F_1 = 1 \geq 2^{-1/2}$ 和 $F_2 = 1 \geq 2^0$，而 $F_3 = 2 \geq 2^{1/2}$，以每次两步的归纳法（induction）可得对每个 i 都有 $F_i \geq 2^{(i-2)/2}$。所以 $0 < 1/F_i \leq (1/\sqrt{2})^{i-2}$，于是与公比为 $1/\sqrt{2} < 1$ 的等比级数比较，可知 S 收敛（converges）。这样我们就可以放心地对下面的和式进行运算。我们还会反复用到一个事实：若对每个 i 都有 $a_i \leq b_i$，并且至少有一个 i 使 $a_i < b_i$，则对收敛级数而言 $\sum a_i < \sum b_i$。

第 (i) 部分

下界。 当 $i \geq 4$ 时，$F_{i-2} < F_{i-1}$，所以

$$F_i = F_{i-1} + F_{i-2} < 2F_{i-1} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{F_i} > \frac{1}{2F_{i-1}} \qquad (i \geq 4),$$

这就是第一个结果。（当 $i = 3$ 时等号成立，即 $F_3 = 2F_2$，所以这个不等式要由 $i = 4$ 开始。）

反复应用这个结果，当 $i \geq 4$ 时，

$$\frac{1}{F_i} > \frac{1}{2F_{i-1}} > \frac{1}{2^2 F_{i-2}} > \cdots > \frac{1}{2^{i-3}F_3} = \frac{1}{2^{i-2}}.$$

对 $i \geq 4$ 求和，

$$\sum_{i=4}^{\infty} \frac{1}{F_i} > \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{1}{2},$$

所以

$$S = 1 + 1 + \tfrac{1}{2} + \sum_{i=4}^{\infty} \frac{1}{F_i} > \tfrac{5}{2} + \tfrac{1}{2} = 3.$$

上界。 现在使用另一个比较：由上面的 $F_i > 2F_{i-2}$，当 $i \geq 4$ 时 $1/F_i < 1/(2F_{i-2})$。我们把它应用于由 $i = 5$ 起的每一项，并设 $j = i - 2$：

$$\sum_{i=5}^{\infty} \frac{1}{F_i} < \frac{1}{2} \sum_{i=5}^{\infty} \frac{1}{F_{i-2}} = \frac{1}{2} \sum_{j=3}^{\infty} \frac{1}{F_j} = \frac{1}{2}(S - 2).$$

左方是 S 减去它的首四项，即 $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{17}{6}$。因此

$$S - \tfrac{17}{6} < \tfrac{1}{2}S - 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \tfrac{1}{2}S < \tfrac{11}{6} \qquad \Longrightarrow \qquad S < \tfrac{11}{3} = 3\tfrac{2}{3}.$$

? **想一想** 为甚么上界的比较要由 $i = 5$ 开始，而不是由 $i = 4$ 开始?

由 $i = 4$ 开始也行得通，但只会得到 $S - \frac{5}{2} < \frac{1}{2}(S - 1)$，即 $S < 4$，这并不足够。在估计之前准确地加起的项愈多，因子 $\frac{1}{2}$ 令我们损失的就愈少。第 (ii) 部分正是靠这个想法来推动。

第 (ii) 部分

记部分和（partial sum）为 $S_k = \sum_{i=1}^{k} 1/F_i$，尾部为 $T_k = \sum_{i=k}^{\infty} 1/F_i$，于是 $S = S_{k-1} + T_k$。第 (i) 部分用了两个一般的界，两者对 $k \geq 3$ 都成立。

下界：与之前完全一样，当 $i > k$ 时 $1/F_i > 1/(2^{i-k}F_k)$，所以

$$T_{k+1} > \frac{1}{F_k}\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \cdots\right) = \frac{1}{F_k}, \qquad \text{所以} \qquad S > S_k + \frac{1}{F_k}.$$

上界：当 $i \geq k+2 \geq 5$ 时 $1/F_i < 1/(2F_{i-2})$，由此得 $T_{k+2} < \frac{1}{2}T_k$，而 $T_{k+2} = T_k - \frac{1}{F_k} - \frac{1}{F_{k+1}}$，所以

$$T_k < 2\Big(\frac{1}{F_k} + \frac{1}{F_{k+1}}\Big), \qquad \text{所以} \qquad S < S_{k-1} + 2\Big(\frac{1}{F_k} + \frac{1}{F_{k+1}}\Big).$$

取 $k = 3$ 时，这两个界就是第 (i) 部分的 3 和 $3\frac{2}{3}$。现在在两者中都取 $k = 5$。

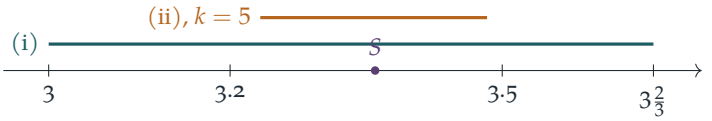
对于下界，$S_5 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{91}{30}$，所以

$$S > \frac{91}{30} + \frac{1}{5} = \frac{97}{30} > \frac{96}{30} = 3.2.$$

对于上界，$S_4 = \frac{17}{6}$，而 $F_5 = 5$，$F_6 = 8$，所以

$$S < \frac{17}{6} + 2\Big(\frac{1}{5} + \frac{1}{8}\Big) = \frac{17}{6} + \frac{13}{20} = \frac{170 + 39}{60} = \frac{209}{60} < \frac{210}{60} = 3.5.$$

合起来便得 $3.2 < S < 3.5$，正如所求。（$k = 4$ 并不足够：它只给出 $\frac{19}{6} < S < \frac{107}{30}$，约为 $3.17 < S < 3.57$。）



验算

- 以数值方法把首 200 项加起来，得 $S \approx 3.35989$。这个值落在两个区间之内，而且 $k = 3, \ldots, 6$ 的界全都把它夹在中间：$3 < \frac{19}{6} < \frac{97}{30} < \frac{197}{60} < S < \frac{2681}{780} < \frac{209}{60} < \frac{107}{30} < \frac{11}{3}$。
- 用实际数值检验这些比较：$F_7 = 13 < 2 \times 8$，而 $13 > 2 \times 5$。

常见错误

- 在 $i = 3$ 时使用 $1/F_i > 1/(2F_{i-1})$，但该处其实是等式。这会破坏不等式的严格性，或者得出错误的等比级数和。
- 未先确定级数收敛，就把 S 当作一个数来运算（“$S - \frac{17}{6} < \frac{1}{2}S - 1$”）。
- 因为由 $i = 4$ 开始的比较只给出 $S < 4$，就放弃求上界。应在估计之前先准确地加起更多的项。

STEP 之外

这个值是 $S \approx 3.3598856\ldots$，称为*斐波那契倒数常数*（reciprocal Fibonacci constant）。现已知道它是无理数（irrational；这是 André-Jeannin 在 1989 年的结果），但至今未有

已知的闭合形式（closed form）。这里的比较其实是乔装了的比值审敛法（ratio test）。F_{i+1}/F_i 趋向黄金比（golden ratio）$\varphi = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$，所以尾部的表现就像一个公比为 $1/\varphi \approx 0.618$ 的等比级数，介乎我们那两个粗略的公比 $\frac{1}{2}$ 与 $1/\sqrt{2}$ 之间。这类比较审敛法（comparison test）和尾部估计，是大学第一门分析（analysis）课程的核心内容。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）是正式认识这些内容的绝佳起点。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。