详细解答

STEP II 2009，第 5 题

纯数学 · 嵌套平方根

STEP II 2009，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/09-s2-q5

关键思路

开首的展开式其实就是整道题的化身：它告诉我们 $x+2\sqrt{x-1}$ 是一个完全平方（perfect square），而用同样的手法可知 $x-2\sqrt{x-1}$ 也是。只要把嵌套根式（nested roots）拆开，每个被积函数（integrand）都会化简成初等的式子。唯一要留神的是 $\sqrt{a^2}=|a|$，而不是 a，所以我们必须留意正负号，而这正是第 (ii) 部分有趣之处。

解答

展开式

当 $x \geq 1$ 时，

$$(\sqrt{x-1}+1)^2 = (x-1)+2\sqrt{x-1}+1 = x+2\sqrt{x-1}.$$

同理，$(\sqrt{x-1}-1)^2 = x-2\sqrt{x-1}$。取非负平方根，并记住 $\sqrt{a^2}=|a|$，

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1}+1, \qquad \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = |\sqrt{x-1}-1|.$$

第一式不需要绝对值（modulus），因为 $\sqrt{x-1}+1>0$。第二式则需要：$\sqrt{x-1}-1$ 在 $1 \leq x < 2$ 时为负，在 $x \geq 2$ 时为非负。

第 (i) 部分

在 $[5,10]$ 上，我们有 $\sqrt{x-1} \geq 2 > 1$，所以 $|\sqrt{x-1}-1| = \sqrt{x-1}-1$。因此分子是

$$(\sqrt{x-1}+1)+(\sqrt{x-1}-1) = 2\sqrt{x-1},$$

而被积函数就只是 2。故此

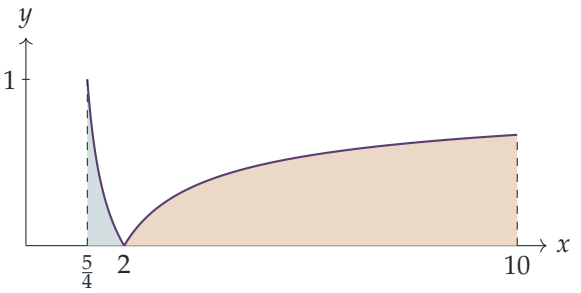
$$\int_5^{10} \frac{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x = \int_5^{10} 2\,\mathrm{d}x = 10.$$

第 (ii) 部分

由展开式可得

$$y = \frac{|\sqrt{x-1}-1|}{\sqrt{x-1}} = \left|1-\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right|.$$

所以 $y \geq 0$ 恒成立，而曲线在 $x=2$ 处与 x-轴相切，该处 $\sqrt{x-1}=1$。



? **想一想** 为甚么我们不能直接去掉平方根，在整个范围上对 $1-\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ 积分?

因为 $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ 永不为负，但 $\sqrt{x-1}-1$ 在 $x<2$ 时为负。忽略绝对值的话，就会把 $[\frac{5}{4},2]$ 上的那一块当作负面积计算。所以我们在 $x=2$ 处把积分分开。

在 $[\frac{5}{4},2]$ 上，$\sqrt{x-1}\leq 1$，所以 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}-1$，而

$$\int_{5/4}^{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}-1\right)\mathrm{d}x = \left[2\sqrt{x-1}-x\right]_{5/4}^{2} = (2-2)-(1-\tfrac{5}{4}) = \tfrac{1}{4}.$$

在 $[2,10]$ 上，$\sqrt{x-1}\geq 1$，所以 $y=1-\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$，而

$$\int_2^{10}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)\mathrm{d}x = \left[x-2\sqrt{x-1}\right]_2^{10} = (10-6)-(2-2) = 4.$$

因此总面积是 $\frac{1}{4}+4=\frac{17}{4}$。

第 (iii) 部分

分子中第二个根式的形状有所不同，但只要以 $x+1$ 取代 $x-1$，同样的手法仍然奏效：

$$(\sqrt{x+1}-1)^2 = (x+1)-2\sqrt{x+1}+1 = x-2\sqrt{x+1}+2.$$

当 $x \geq \frac{5}{4}$ 时，我们有 $\sqrt{x+1} > 1$，所以 $\sqrt{x-2\sqrt{x+1}+2} = \sqrt{x+1}-1$，不需要绝对值。写成 $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{x-1}\,\sqrt{x+1}$（由于当 $x > 1$ 时两个因子皆为正，此式成立），被积函数便变成

$$\frac{(\sqrt{x-1}+1)+(\sqrt{x+1}-1)}{\sqrt{x-1}\,\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}\,\sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}.$$

两个 ± 1 项互相抵消，这正是分子看来有点古怪的用意所在。故此

$$\begin{aligned}\int_{5/4}^{10}\Big(\frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}\Big)\mathrm{d}x &= \Big[2\sqrt{x+1}+2\sqrt{x-1}\Big]_{5/4}^{10} \\ &= (2\sqrt{11}+6)-(3+1) \\ &= 2\sqrt{11}+2,\end{aligned}$$

其中在下限处用到 $\sqrt{9/4} = \frac{3}{2}$ 和 $\sqrt{1/4} = \frac{1}{2}$。

验算

- 在 $x = 5$ 处：$\sqrt{5+4} = 3$ 而 $\sqrt{5-4} = 1$，所以 (i) 的被积函数是 $(3+1)/2 = 2$，与所说相符。
- 在 (ii) 中，曲线在 $x = \frac{5}{4}$ 处的高度是 $|1-2| = 1$，在 $x = 10$ 处的高度是 $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$，与草图吻合；第一块是面积为 $\frac{1}{4}$ 的狭长小片，这是合理的。
- 对原来的被积函数使用辛普森法则（Simpson's rule），得出 10.000、4.250 和 8.6332，与 10、$\frac{17}{4}$ 和 $2\sqrt{11}+2 \approx 8.6332$ 一致。

常见错误

- 对所有 x 都写 $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1}-1$。在 (ii) 中这会得出 $4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$，而不是 $\frac{17}{4}$。
- 在 (iii) 中，没有察觉 $x-2\sqrt{x+1}+2$ 也是完全平方，反而尝试用代换法（substitution）。

STEP 之外

恒等式 $\sqrt{a^2} = |a|$ 是分析学（analysis）中一个重大主题的小例子：以公式定义的函数可以暗藏尖角和正负号的转变，在积分之前，你必须先看清楚式子在哪里变号。把 $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}$ 这类根式解除嵌套（denesting），背后也有出奇地深刻的代数理论，与域扩张（field extensions）有关。在分析学方面，Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）是很好的下一步。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。