详细解答

STEP II 2009，第 4 题

纯数学 · 多项式的整除性

STEP II 2009，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/09-s2-q4

关键思路

处理“可被 $(x-1)^5$ 整除（divisible）”这个条件，最好的方法是把它直接写出来：对某个多项式（polynomial）q，有 $\mathrm{p}(x) = 1 + (x-1)^5\mathrm{q}(x)$。求导（differentiate）后可见，$\mathrm{p}(x) - 1$ 的重因式（repeated factor）会保留在 $\mathrm{p}'(x)$ 之中，只是幂次低一次。在最后一部分，这几乎完全确定了 p'，因此我们只需对 p' 积分（integrate）便可求出 p，而不必与十个未知系数（coefficient）苦苦纠缠。

解答

由于 $\mathrm{p}(x) - 1$ 可被 $(x-1)^5$ 整除，而且次数（degree）为 9，我们可以写成

$$\mathrm{p}(x) = 1 + (x-1)^5\,\mathrm{q}(x),$$

其中 q 是一个 4 次多项式。

第 (i) 部分

代入 $x = 1$，第二项便会消失，所以

$$\mathrm{p}(1) = 1.$$

第 (ii) 部分

利用乘积法则（product rule）求导，

$$\begin{aligned} \mathrm{p}'(x) &= 5(x-1)^4\,\mathrm{q}(x) + (x-1)^5\,\mathrm{q}'(x) \\ &= (x-1)^4(5\mathrm{q}(x) + (x-1)\mathrm{q}'(x)). \end{aligned}$$

括号内是一个多项式，所以 $\mathrm{p}'(x)$ 可被 $(x-1)^4$ 整除，正如题目所求。

第 (iii) 部分

把 $x-1$ 换成 $x+1$，完全相同的论证依然适用：写成 $\mathrm{p}(x) = -1 + (x+1)^5\,\mathrm{r}(x)$，便得 $\mathrm{p}(-1) = -1$，并且可知 $\mathrm{p}'(x)$ 可被 $(x+1)^4$ 整除。

因此 $\mathrm{p}'(x)$ 同时可被 $(x-1)^4$ 和 $(x+1)^4$ 整除。

? **想一想** 为甚么由此可知 $\mathrm{p}'(x)$ 可被两者之积 $(x-1)^4(x+1)^4$ 整除?

设 $\mathrm{p}'(x) = (x-1)^4\mathrm{s}(x)$。$(x+1)^4$ 的每一个根（root）都是 -1，而它并不是 $(x-1)^4$ 的根，所以因式 $(x+1)^4$ 必定整除 $\mathrm{s}(x)$。（换句话说，一次因式（linear factor）$x+1$ 在 p' 中出现了四次，而这四个因式没有一个可以被 $(x-1)^4$ 用掉。）因此 $(x-1)^4(x+1)^4 = (x^2-1)^4$ 整除 $\mathrm{p}'(x)$。

现在 p' 的次数是 8，与 $(x^2-1)^4$ 的次数相同，所以商（quotient）是一个非零常数：

$$\mathrm{p}'(x) = k(x^2-1)^4 = k\left(x^8 - 4x^6 + 6x^4 - 4x^2 + 1\right).$$

积分后得

$$\mathrm{p}(x) = k\,\mathrm{F}(x) + c, \qquad \mathrm{F}(x) = \frac{x^9}{9} - \frac{4x^7}{7} + \frac{6x^5}{5} - \frac{4x^3}{3} + x.$$

留意 F 是奇函数（odd function），所以 $\mathrm{F}(-1) = -\mathrm{F}(1)$。由已知的两个函数值可得

$$k\mathrm{F}(1) + c = \mathrm{p}(1) = 1, \qquad -k\mathrm{F}(1) + c = \mathrm{p}(-1) = -1.$$

两式相加，得 $c = 0$；两式相减，得 $k\mathrm{F}(1) = 1$。以 315 为公分母，

$$\mathrm{F}(1) = \frac{35 - 180 + 378 - 420 + 315}{315} = \frac{128}{315}, \qquad \text{所以} \qquad k = \frac{315}{128}.$$

因此

$$\mathrm{p}(x) = \frac{1}{128}\left(35x^9 - 180x^7 + 378x^5 - 420x^3 + 315x\right).$$

我们还应该验证这个多项式确实符合要求，因为到目前为止，我们只证明了任何符合条件的 p 都必定是这个形式。它的次数是 9。此外，$\mathrm{p}(1) - 1 = 0$，而且 $\mathrm{p}'(x) = \frac{315}{128}(x-1)^4(x+1)^4$，所以 $\mathrm{p}(x) - 1$ 的首四阶导数（derivative）在 $x = 1$ 处全部为零；因此 $x = 1$

是 $\mathrm{p}(x)-1$ 的根，其重数（multiplicity）至少为 5，即 $(x-1)^5$ 整除 $\mathrm{p}(x)-1$。由于 p 是奇函数，$\mathrm{p}(x)+1=-(\mathrm{p}(-x)-1)$，而后者可被 $(-x-1)^5=-(x+1)^5$ 整除。所以两个条件都成立，而这个 p 就是唯一的答案。

验算

- 系数 $35,-180,378,-420,315$ 之和为 128，由此确认 $\mathrm{p}(1)=1$。
- 以准确的分数运算，把 $\mathrm{p}(x)-1$ 反复除以 $x-1$，余数（remainder）恰好有五次为零；把 $\mathrm{p}(x)+1$ 反复除以 $x+1$，结果亦然。
- p 是奇函数，这是必然的：若 p 符合条件，则 $-\mathrm{p}(-x)$ 亦符合条件，而答案是唯一的。

常见错误

- 试图由十条联立方程（simultaneous equations）直接求出 p 的全部十个系数。这在原则上可行，但对 p' 积分要快得多。
- 忘记积分常数（constant of integration），或者没有同时利用 $\mathrm{p}(1)=1$ 和 $\mathrm{p}(-1)=-1$ 来确定积分常数和 k。

STEP 之外

第 (ii) 部分背后的事实是：a 是 f 的 m 重根，当且仅当 $\mathrm{f}(a)=\mathrm{f}'(a)=\cdots=\mathrm{f}^{(m-1)}(a)=0$。像这样在若干点上指定函数值和导数值，称为埃尔米特插值（*Hermite interpolation*）；而这里求得的多项式是一条“smoothstep”曲线，由 -1 上升至 1，并且在两端尽可能平坦，常用于电脑图像（computer graphics）。“互质（coprime）的因式各自整除，则其乘积亦整除”这个论证属于环论（ring theory）：域（field）上的多项式具有唯一分解（unique factorisation）性质，与整数一样。想进一步了解，可参阅 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（环、域与群）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。