详细解答

STEP II 2009，第 3 题

纯数学 · 三角恒等式与根式

> **STEP II 2009，第 3 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/09-s2-q3

关键思路

恒等式（identity）$(*)$ 把你已知的角 x 的正切（tangent），化为角 $\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x$ 的正切，而后者的大小约为前者的一半。因此它就像一部半角（half-angle）机器。功夫在于选取一个起始角 x，使它恰好落在你想要的角上。之后的工作就是细心地进行根式（surd）运算：有理化（rationalising）、展开和平方。

解答

证明 $(*)$

设 $\theta = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x$，则 $x = \frac{1}{2}\pi - 2\theta$。于是

$$\sin x = \cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta, \qquad \cos x = \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta.$$

因此，只要两边均有定义（即 $\cos x \neq 0$），便有

$$\sec x - \tan x = \frac{1-\sin x}{\cos x} = \frac{2\sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}x\right).$$

约去 $\sin\theta$ 是容许的，因为 $\cos x = 2\sin\theta\cos\theta \neq 0$ 必然使 $\sin\theta \neq 0$。这就证明了 $(*)$。

第 (i) 部分

我们要 $\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x = \frac{1}{8}\pi$，由此得 $x = \frac{1}{4}\pi$。由于 $\sec\frac{1}{4}\pi = \sqrt{2}$ 及 $\tan\frac{1}{4}\pi = 1$，

$$\tan\tfrac{1}{8}\pi = \sqrt{2} - 1.$$

至于第二个结果，留意 $\frac{11}{24}\pi = \frac{3}{24}\pi + \frac{8}{24}\pi = \frac{1}{8}\pi + \frac{1}{3}\pi$，而我们知道 $\tan\frac{1}{3}\pi = \sqrt{3}$。由复角公式（addition formula）得

$$\tan\tfrac{11}{24}\pi = \frac{\tan\frac{1}{8}\pi + \tan\frac{1}{3}\pi}{1 - \tan\frac{1}{8}\pi\tan\frac{1}{3}\pi} = \frac{(\sqrt{2}-1)+\sqrt{3}}{1-(\sqrt{2}-1)\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}-\sqrt{6}+1},$$

这正是所求的结果。

第 (ii) 部分

与其把一个有三项的分母有理化，不如直接证明以下等式，这样更快：

$$(2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})(\sqrt{3}-\sqrt{6}+1) = \sqrt{3}+\sqrt{2}-1.$$

把 $\sqrt{3}-\sqrt{6}+1$ 依次乘以第一个括号内的每一项，并利用 $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ 及 $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$：

$$\begin{aligned}
2(\sqrt{3}-\sqrt{6}+1) &= 2\sqrt{3}-2\sqrt{6}+2,\\
\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{6}+1) &= \sqrt{6}-2\sqrt{3}+\sqrt{2},\\
\sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{6}+1) &= 3-3\sqrt{2}+\sqrt{3},\\
\sqrt{6}(\sqrt{3}-\sqrt{6}+1) &= 3\sqrt{2}-6+\sqrt{6}.
\end{aligned}$$

现在把同类项合并。常数项得 $2+3-6=-1$。$\sqrt{2}$ 项得 $1-3+3=1$。$\sqrt{3}$ 项得 $2-2+1=1$。$\sqrt{6}$ 项得 $-2+1+1=0$。总和为 $\sqrt{3}+\sqrt{2}-1$。分母 $\sqrt{3}-\sqrt{6}+1 \approx 0.28$ 不等于零，所以我们可以除以它，于是

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}-\sqrt{6}+1} = 2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}.$$

? **想一想** 最后一部分应把哪个 x 值代入 $(*)$?

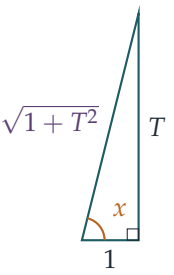
我们需要 $\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x = \frac{1}{48}\pi$，所以 $\frac{1}{2}x = \frac{11}{48}\pi$，即 $x = \frac{11}{24}\pi$。这正好是我们在 (i) 和 (ii) 中求得其正切的那个角。

第 (iii) 部分

设 $T = \tan\frac{11}{24}\pi = 2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$。在 $(*)$ 中取 $x = \frac{11}{24}\pi$，得

$$\tan\tfrac{1}{48}\pi = \sec\tfrac{11}{24}\pi - T.$$

至于正割（secant），我们有 $\sec^2 x = 1+\tan^2 x$。由于 $0 < \frac{11}{24}\pi < \frac{1}{2}\pi$，余弦为正，所以取正根，$\sec\frac{11}{24}\pi = \sqrt{1+T^2}$。下面的三角形显示的是同一件事。



把 T 平方，四项各自的平方之和为 $4+2+3+6=15$。交叉项之和为

$$2(2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}+\sqrt{6}+\sqrt{12}+\sqrt{18})=2(5\sqrt{2}+4\sqrt{3}+3\sqrt{6})=10\sqrt{2}+8\sqrt{3}+6\sqrt{6}.$$

所以 $1+T^2=16+10\sqrt{2}+8\sqrt{3}+6\sqrt{6}$，因此

$$\tan\tfrac{1}{48}\pi=\sqrt{16+10\sqrt{2}+8\sqrt{3}+6\sqrt{6}}-2-\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6},$$

正如所求。

验算

- $\sqrt{2}-1\approx 0.41421$，与 $\tan 22.5^\circ$ 相符。
- $2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}\approx 7.59575$，与 $\tan 82.5^\circ$ 相符。(i) 中的分数也给出相同的值。
- 最后的表达式为 $\sqrt{57.45\ldots}-7.59575\approx 0.0655435$，与 $\tan 3.75^\circ\approx 0.0655435$ 相符。
- 快速检验 $(*)$：当 $x=0$ 时两边均等于 1，而当 $x=\frac{1}{3}\pi$ 时两边均等于 $2-\sqrt{3}=\tan\frac{1}{12}\pi$。

常见错误

- 解 $\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}x=\frac{1}{48}\pi$ 时出错，误用 $x=\frac{11}{48}\pi$。那个 $\frac{1}{2}$ 必须消去。
- 把四项的根式平方时遗漏交叉项。交叉项共有六个，每个都要乘以二。
- 直接取 $\sec x=\sqrt{1+\tan^2 x}$，却没有说明为何正根才是正确的。

STEP 之外

像 $\tan\frac{\pi}{48}$ 这类精确值，连同当中层层相套的平方根，就是这样靠反复把角减半而逐步构造出来的。这正是一个古典问题在代数上的一面：哪些正多边形可以用尺规作图（ruler and compass construction）作出？高斯（Gauss）证明了答案取决于 $\cos\frac{2\pi}{n}$ 能否只用平方根来表示，而伽罗华理论（Galois theory）则解释了个中原因。域（field）和域扩张

（field extension）是讲述这个故事的语言，若想初步认识，可参阅 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《环、域与群》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。