详细解答

STEP II 2009，第 2 题

纯数学 · 曲线描绘与近似

> **STEP II 2009，第 2 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/09-s2-q2

关键思路

由于 $a > 1$，函数 a^u 对 u 严格递增（strictly increasing），所以 y 恰好在 $\sin(\pi e^x)$ 最大之处取得最大值，在它最小之处取得最小值。因此，这条曲线的一切性质都来自内层函数 πe^x：它稳定地递增，依次经过正弦函数的波峰和波谷，而且随着 x 增大，这些点会愈来愈密集。至于面积，各梯形（trapezium）两端的高度相同，于是整个和式便化简为单单一个对数之差。

解答

第 (i) 部分

取对数（logarithm），得 $\ln y = \ln a \, \sin(\pi e^x)$。以隐函数求导（implicit differentiation），

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pi \ln a \, e^x \cos(\pi e^x), \qquad \text{所以} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pi \ln a \, e^x \cos(\pi e^x) \, a^{\sin(\pi e^x)}.$$

这里 $\ln a > 0$（因为 $a > 1$），$e^x > 0$ 而且 $a^{\sin(\pi e^x)} > 0$，所以导数恰好在 $\cos(\pi e^x) = 0$ 时为零，即 πe^x 是 $\frac{\pi}{2}$ 的奇数倍之时。由于 $\pi e^x > 0$，只有正的奇数倍才有可能：

$$e^x = n + \tfrac{1}{2}, \qquad x = \ln(n + \tfrac{1}{2}), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

在这些点上 $\sin(\pi e^x) = \sin((n + \frac{1}{2})\pi) = (-1)^n$，所以 $y = a^{(-1)^n}$。驻点（stationary point）为

$$\left(\ln(n + \tfrac{1}{2}),\, a\right) \ (n \text{ 为偶数}), \qquad \left(\ln(n + \tfrac{1}{2}),\, \tfrac{1}{a}\right) \ (n \text{ 为奇数}).$$

第一组是极大点，第二组是极小点。由于 a^u 递增，对任何 x 都有 $y \le a^1 = a$ 和 $y \ge a^{-1}$，所以 $y = a$ 的点是全局极大点（global maximum），$y = 1/a$ 的点是全局极小

点（global minimum）。具体来说，极大点位于 $x = \ln\frac{1}{2}, \ln\frac{5}{2}, \ln\frac{9}{2}, \ldots$，极小点位于 $x = \ln\frac{3}{2}, \ln\frac{7}{2}, \ln\frac{11}{2}, \ldots$

第 (ii) 部分

当 x 很小时，$e^x \approx 1 + x$，所以

$$\sin(\pi e^x) \approx \sin(\pi + \pi x) = -\sin(\pi x) \approx -\pi x,$$

这里先用了 $\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$，再用 $\sin t \approx t$，其中 $t = \pi x$ 很小。因此

$$y \approx a^{-\pi x} = e^{-\pi x \ln a} \approx 1 - \pi x \ln a,$$

最后一步再次用到 $e^t \approx 1 + t$，这次的小量是 $t = -\pi x \ln a$。这就是所求的近似式：曲线在 $x = 0$ 处穿过直线 $y = 1$，斜率（gradient）为 $-\pi \ln a$。

> ? **想一想** 为甚么不能把 $\sin t \approx t$ 直接代入 $\sin(\pi e^x)$?

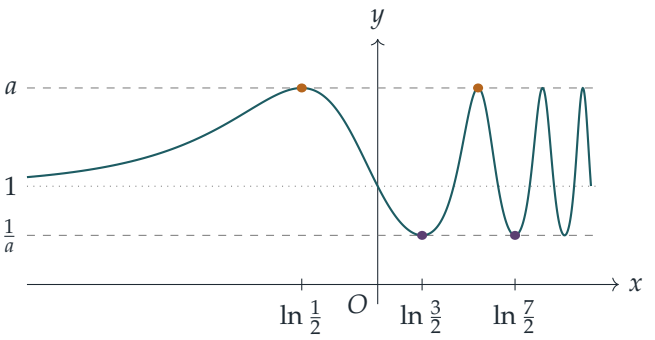
因为当 x 很小时，πe^x 接近的是 π，而不是 0。我们必须先用 $\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$，把小量 πx 移到正弦函数的自变量之中。

第 (iii) 部分

草图上应标示的一些特征：

- 当 $x \to -\infty$ 时，$e^x \to 0$，所以 $\sin(\pi e^x) \to 0$，而 $y \to 1$，并且是从上方趋近（当 $x < \ln\frac{1}{2}$ 时，我们有 $0 < \pi e^x < \frac{\pi}{2}$，所以正弦值为正，$y > 1$）。直线 $y = 1$ 是曲线在左方的渐近线（asymptote）。
- 曲线上升至位于 $x = \ln\frac{1}{2}$ 的第一个极大值 a，然后永远在 a 与 $1/a$ 之间振荡，并且始终在 x 轴上方。
- 每当 e^x 是正整数时，曲线便穿过 $y = 1$，即在 $x = 0, \ln 2, \ln 3, \ldots$ 处；而由第 (ii) 部分可知，在 $x = 0$ 处的斜率为 $-\pi \ln a$。
- 相邻驻点之间的距离为 $\ln\frac{n+3/2}{n+1/2} \to 0$，所以随着 x 增大，振荡愈来愈快。

下面的草图显示 $a = 2$ 的情况。



第 (iv) 部分

从左边数起：第 k 个极大点对应 $n = 2(k-1)$，所以它位于 $\mathrm{e}^x = 2k - \frac{3}{2}$。第 $(k+1)$ 个极大点位于 $\mathrm{e}^x = 2k + \frac{1}{2}$，而两者之间唯一的极小点位于 $\mathrm{e}^x = 2k - \frac{1}{2}$。记

$$x_1 = \ln\left(2k - \tfrac{3}{2}\right), \qquad x_2 = \ln\left(2k - \tfrac{1}{2}\right), \qquad x_3 = \ln\left(2k + \tfrac{1}{2}\right).$$

用直线把 (x_1, a) 连到 $(x_2, \frac{1}{a})$，再把 $(x_2, \frac{1}{a})$ 连到 (x_3, a)，则直线以下至 x 轴的区域分成两个梯形，每个梯形的两条平行边长度都是 a 和 $\frac{1}{a}$。所以面积的近似值为

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\left(a + \tfrac{1}{a}\right)(x_2 - x_1) + \tfrac{1}{2}\left(a + \tfrac{1}{a}\right)(x_3 - x_2) &= \frac{a^2+1}{2a}\,(x_3 - x_1) \\ &= \frac{a^2+1}{2a}\ln\frac{2k+\frac{1}{2}}{2k-\frac{3}{2}} = \frac{a^2+1}{2a}\ln\frac{k+\frac{1}{4}}{k-\frac{3}{4}}.\end{aligned}$$

最后，$\dfrac{k+\frac{1}{4}}{k-\frac{3}{4}} = 1 + \dfrac{1}{k-\frac{3}{4}}$，所以面积近似于

$$\left(\frac{a^2+1}{2a}\right)\ln\left(1 + \left(k - \tfrac{3}{4}\right)^{-1}\right),$$

正如题目所求。留意极小点的位置 x_2 完全消去了：只有两个极大点起作用。

验算

- 以数值方法求导，可确认在 $n = 0, \ldots, 7$ 时 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 0$ 于 $x = \ln(n + \frac{1}{2})$ 成立，而在 $[-6, \ln 8]$ 上再无其他零点；同时亦确认在 $x = 0$ 处的斜率为 $-\pi \ln a$（取 $a = 2$ 时，两者皆为 -2.1776）。
- 取 $a = 2$、$k = 1$ 时，公式给出 $\frac{5}{4}\ln 5 \approx 2.012$，而用辛普森法则（Simpson's rule）求得的真实面积是 1.954：两者相当接近，正是近似值应有的表现。梯形的估算略为偏高：曲线在极小点附近低于弦线的幅度，大于它在极大点附近高出弦线的幅度。
- 当 $k \to \infty$ 时，面积趋向 0，与振荡愈来愈窄的现象吻合。

常见错误

- 在第 (i) 部分把 $\frac{\pi}{2}$ 的负奇数倍也算进去：πe^x 永远是正数。
- 从 $k = 0$ 而不是 $k = 1$ 开始为极大点编号，结果答案会变成 $\ln\left(1 + (k + \frac{1}{4})^{-1}\right)$。
- 在第 (ii) 部分停在 $a^{-\pi x}$，没有做最后一步线性化 $e^t \approx 1 + t$。

STEP 之外

第 (ii) 部分其实是把较简单的展开式复合起来，从而得出一阶泰勒展开（Taylor expansion），这正是大学本科生处理复合函数展开的方法。当 k 很大时，一次振荡之下的真实面积大约是 $(x_3 - x_1)$ 乘以 $a^{\sin\theta}$ 在一个周期上的平均值，这个积分会引出修正贝塞尔函数（modified Bessel function）$I_0(\ln a)$；把它与 $\frac{1}{2}(a + \frac{1}{a})$ 比较，是一道很好的练习，可借此明白为甚么梯形法则（trapezium rule）对这类曲线会高估。若想看对近似与泰勒定理（Taylor's theorem）的严谨论述，可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*（数学分析入门书）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。