详细解答

STEP II 2009，第 11 题

力学 · 功率与阻力

> **STEP II 2009，第 11 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/09-s2-q11

关键思路

把整列火车视为一个质量为 $(n+1)M$、总阻力为 $(n+1)R$ 的物体。在功率（power）为 P 时，速率为 v 时的驱动力是 P/v，所以由牛顿第二定律（Newton's second law）可立即得出加速度。要求出达到某个速率所需的时间，可把加速度写成 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$，分离变量（separate the variables）后积分。最后一部分是能量收支：引擎所作的功转化为动能（kinetic energy），以及克服阻力所作的功。

解答

把引擎和各节车卡看成一起运动的质点（particle）（车钩保持拉紧且为刚性），于是整列火车是单一物体。设

$$m = (n+1)M, \qquad k = (n+1)R$$

分别为它的总质量和总阻力。

加速度

功率等于力乘以速率，所以在最大功率下、速率为 v 时，引擎的牵引力（tractive force）为 P/v。沿路轨方向分解，对整列火车应用牛顿第二定律，得

$$ma = \frac{P}{v} - k, \qquad \text{所以} \qquad a = \frac{P-(n+1)Rv}{(n+1)Mv}.$$

达到速率 V 所需的时间

设 $a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，然后分离变量：

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}v} = \frac{mv}{P - kv}, \qquad T = m\int_0^V \frac{v}{P-kv}\,\mathrm{d}v.$$

要计算这个积分，可把分子用分母表示，即 $v = \frac{1}{k}(P - (P - kv))$，从而把分式拆开：

$$\frac{v}{P-kv} = -\frac{1}{k} + \frac{P}{k}\cdot\frac{1}{P-kv}.$$

因此

$$T = m\Big[-\frac{v}{k} - \frac{P}{k^2}\ln(P-kv)\Big]_0^V = -\frac{mV}{k} - \frac{mP}{k^2}\ln\Big(1 - \frac{kV}{P}\Big).$$

由于 $m/k = M/R$ 及 $m/k^2 = M/((n+1)R^2)$，

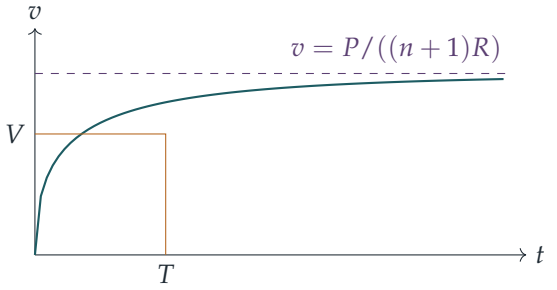
$$T = -\frac{MV}{R} - \frac{MP}{(n+1)R^2}\ln\Big(1 - \frac{(n+1)RV}{P}\Big).$$

想一想 为甚么 P 必须大于 $(n+1)RV$，而这不仅仅是令对数有意义的条件？

从物理上看，当 $v < P/k$ 时，加速度 $(P-kv)/(mv)$ 为正，而在 $v = P/k$ 时加速度会变为零。火车由 $v = 0 < P/k$ 出发并加速，但随着 v 趋近 P/k，加速度逐渐消失。公式显示火车永远到不了这个速率：当 $V \to P/k$（由下方趋近）时，$\ln(1 - kV/P) \to -\infty$，所以 $T \to \infty$。因此 P/k 是终端速率（terminal speed），火车会不断趋近它，却无法在有限时间内达到，而等于或高于它的速率则永远达不到。所以，只有当 $V < P/k$ 时才能达到速率 V，即

$$P > (n+1)RV,$$

这正是所需的结果。（等价地说，$P \le kV$ 意味着引擎即使全力输出，也无法在速率 V 时抵消阻力。）



（此草图只属定性描绘：起初驱动力 P/v 很大，速率急升，其后逐渐趋平，接近终端速率。）

第 (i) 部分

设 $x = \dfrac{(n+1)RV}{P} = \dfrac{kV}{P}$，它是一个很小的量。于是 $\ln(1-x) \approx -x - \frac{1}{2}x^2$，再利用 $V = Px/k$，得

$$T = -\frac{mV}{k} - \frac{mP}{k^2}\ln(1-x) \approx -\frac{mP}{k^2}\,x + \frac{mP}{k^2}\left(x + \tfrac{1}{2}x^2\right) = \frac{mP}{2k^2}\,x^2 = \frac{mP}{2k^2}\cdot\frac{k^2V^2}{P^2} = \frac{mV^2}{2P}.$$

一阶项刚好完全抵消，这就是我们需要 x^2 项的原因。因此

$$PT \approx \tfrac{1}{2}(n+1)MV^2.$$

诠释。PT 是引擎在时间 T 内所作的功，而 $\frac{1}{2}(n+1)MV^2$ 是火车所获得的动能。所以当 $(n+1)RV$ 远小于 P 时（阻力乘以速率远小于引擎的功率），引擎所作的功几乎全部转化为动能，只有极少耗于阻力：火车的表现就如同没有阻力一样。

第 (ii) 部分

在时间 T 内，引擎以恒定功率 P 运作，所作的功为 PT。在距离 X 内，恒定的总阻力 $(n+1)R$ 所作的功为 $-(n+1)RX$；换言之，火车克服阻力作了 $(n+1)RX$ 的功。火车由静止出发，最后速率为 V，而路轨是水平的，所以势能（potential energy）没有改变。根据功能原理（work–energy principle），

$$PT = \tfrac{1}{2}(n+1)MV^2 + (n+1)RX.$$

移项整理，得

$$X = \frac{2PT - (n+1)MV^2}{2(n+1)R},$$

这正是所需的结果。这与第 (i) 部分吻合：若阻力可以忽略，$(n+1)RX$ 一项便会消失，剩下 $PT \approx \frac{1}{2}(n+1)MV^2$。

验算

- 取 $n = 3$、$M = 2$、$R = 1$、$P = 40$、$V = 6$（于是 $(n+1)RV = 24 < 40$）。公式给出 $T \approx 6.3258$，继而 $X \approx 27.258$。以数值方法把运动方程逐步向前推算，所得数值准确至四位有效数字都相同。
- 量纲（dimensions）：MV/R 是（质量）（速率）/（力），即时间，MP/R^2 亦然；对数则是无量纲的。
- 当 $V \to P/\big((n+1)R\big)$ 时，T 无止境地增大（以上述数值计算，在终端速率的 90%、99%、99.9% 时，$T \approx 28$、72、118），这印证了该条件。
- 当 x 很小时，比值 $PT/\frac{1}{2}(n+1)MV^2$ 约为 $1 + \frac{2}{3}x$，趋向 1，与第 (i) 部分的预测一致。

常见错误

- 只用引擎本身的质量和阻力，而不是整列火车的：引擎要拉动全部 $n+1$ 节车辆。
- 题目要求的是时间，却写成 $a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}x$，或使用 $v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$。这条路得出的是距离，而不是时间。
- 在第 (i) 部分只把对数展开至一阶：x 项互相抵消，结果得到 $T \approx 0$，答案就此丢失。

STEP 之外

方程 $m\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = P/v - k$ 是一阶非线性常微分方程（ODE），而且恰好是可分离变量的；终端速率 P/k 则是一个稳定平衡点（stable equilibrium），解会不断趋近它，却无法在有限时间内到达。这种现象在光滑常微分方程的平衡点附近十分典型，由解的唯一性（uniqueness of solutions）即可看出。第 (ii) 部分就是功能定理（work–energy theorem），它在大学力学中会成为贯穿全局的核心原理。想进一步了解，可参阅 Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门），至于常微分方程方面，可参阅 Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。