详细解答

STEP II 2009，第 10 题

力学 · 碰撞与恢复系数

STEP II 2009，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/09-s2-q10

关键思路

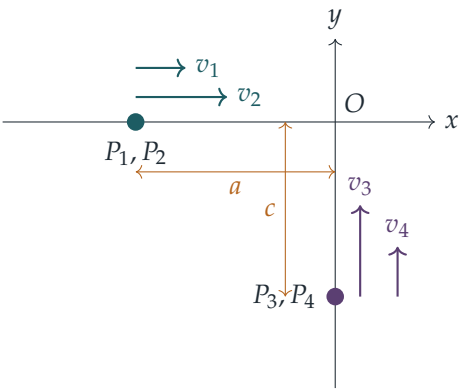
全题共有四次碰撞（collision），但只有头两次需要用到力学：它们决定了碰撞刚结束时的四个速率。其余全是时间上的计算。两个质点（particle）沿不同的轴运动而“在 O 碰撞”，其实就是在同一瞬间到达 O，所以其后每一次碰撞都给出一条形如“距离 / 速率 = 距离 / 速率”的方程。把其中一条时间方程除以另一条，未知的距离便会消去，剩下一个关于质量的条件。

解答

设置

我们把四件物体视为在光滑轴上运动的质点，所以在两次碰撞之间，每个质点都以恒定速度运动。设 P_2 起初位于负 x 轴上与 O 相距 a 之处，P_3 起初位于负 y 轴上与 O 相距 c 之处。我们须证明 $a = c$。

取 $t = 0$ 为头两次碰撞（同时发生）的一刻。这两次碰撞发生在 P_2 和 P_3 原本所在的位置，所以在 $t = 0$ 时，质点 P_1 和 P_2 与 O 的距离都是 a，而 P_3 和 P_4 与 O 的距离都是 c。



头两次碰撞

假设一个质量为 M、以速率 u 运动的质点正面撞向一个质量为 m 的静止质点，恢复系数（coefficient of restitution）为 e，而碰撞后两者沿原来运动方向的速度分别为 V 和 w。由动量守恒（conservation of momentum）和牛顿实验定律（Newton's experimental law）可得

$$Mu = MV + mw, \qquad w - V = eu,$$

所以

$$w = \frac{M(1+e)u}{M+m}, \qquad V = \frac{(M-em)u}{M+m}.$$

把这个结果应用于 P_1 撞向 P_2，以及 P_4 撞向 P_3，可知在 $t = 0$ 刚过后，各质点朝向 O 的速度为

$$v_1 = \frac{(m_1 - em_2)u}{m_1 + m_2}, \qquad v_2 = \frac{m_1(1+e)u}{m_1 + m_2},$$
$$v_4 = \frac{(m_4 - em_3)u}{m_3 + m_4}, \qquad v_3 = \frac{m_4(1+e)u}{m_3 + m_4}.$$

显然 $v_2, v_3 > 0$。由于 P_1 和 P_4 其后确实到达 O，它们必定仍在朝着它运动，所以同样有 $v_1 > 0$ 和 $v_4 > 0$。

利用其后的碰撞

想一想 两个质点分别在互相垂直的轴上，怎样才能“碰撞”？

两条轴唯一的公共点是 O。所以“P_2 和 P_3 在 O 碰撞”的意思不过是它们同时到达 O，P_1 和 P_4 亦然。由 $t = 0$ 至到达 O 为止，每个质点都以恒定速率运动（题目告诉我们，任何

一个质点所涉及的下一次碰撞都在 O 发生），所以到达时间就是距离除以速率：

$$\frac{a}{v_2} = \frac{c}{v_3} \qquad (P_2 \text{ 与 } P_3 \text{ 相遇于 } O), \tag{1}$$

$$\frac{a}{v_1} = \frac{c}{v_4} \qquad (P_1 \text{ 与 } P_4 \text{ 相遇于 } O). \tag{2}$$

把 (1) 除以 (2)，距离便会约去：

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{v_4}{v_3}.$$

根据上面的公式，每个比之中的因子 u 和 $m_1 + m_2$（或 $m_3 + m_4$）都会约去，所以上式即是

$$\frac{m_1 - em_2}{m_1(1+e)} = \frac{m_4 - em_3}{m_4(1+e)},$$

两边同乘以 $m_1 m_4(1+e)$，得

$$m_4(m_1 - em_2) = m_1(m_4 - em_3), \qquad \text{所以} \qquad e\,m_2 m_4 = e\,m_1 m_3.$$

由于 $e > 0$，我们可以除以 e，于是 $m_1 m_3 = m_2 m_4$，即

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{m_4}{m_3} = k, \text{ 姑且如此记之。}$$

现在回到 v_2 和 v_3。把分子和分母分别同除以 m_2 和 m_3，得

$$v_2 = \frac{k(1+e)u}{k+1} = v_3.$$

所以 P_2 和 P_3 在头两次碰撞后以相等的速率离开，于是由 (1) 得 $a = c$。因此 P_2 和 P_3 起初与 O 等距，这正是所要证明的。

验算

- 取 $m_1 = 2$、$m_2 = 1$、$m_3 = 3$、$m_4 = 6$（所以 $k = 2$）、$e = \frac{1}{2}$、$u = 1$ 及 $a = c = 1.7$。那么 $v_2 = v_3 = 1$ 而 $v_1 = v_4 = \frac{1}{2}$：P_2 和 P_3 在 $t = 1.7$ 时一同到达 O，而 P_1 和 P_4 在 $t = 3.4$ 时一同到达，正如题目所说是在较后的时间。逐步模拟的结果与此吻合。
- 留意 $v_2 - v_1 = eu > 0$，所以 P_1 确实在 P_2 之后才到达，与“一段时间之后”相符。
- 若 $e = 0$，这个论证便会失效，而这是理所当然的：此时 $v_1 = v_2$ 且 $v_3 = v_4$，所以 (2) 与 (1) 完全相同，任何满足 $a/c = v_2/v_3$ 的 a 和 c 都可以。这正是题目坚持 $e > 0$ 的原因。

常见错误

- 从 P_1 的起点量度它的路程。在 $t = 0$ 之后，它是从 P_2 原本所在的位置出发，与 O 相距 a，这就是为甚么同一个 a 会同时出现在 (1) 和 (2) 之中。

- 不加说明便除以 e。$e = 0$ 的情况确实有所不同。
- 试图分析 P_2 与 P_3 在 O 的碰撞。我们完全不需要知道这次碰撞的结果，只需要知道它们同时到达那里。

STEP 之外

质量条件 $m_1 m_3 = m_2 m_4$ 说明这两次碰撞是彼此按比例缩放的翻版：正面碰撞后的速度只取决于质量比和 e，这让我们初次窥见量纲分析（dimensional analysis）与相似性（similarity）。在大学里，碰撞问题放在质心参考系（centre-of-mass frame）中处理最为简洁，在那里恢复系数只是把相对速度（relative velocity）按比例缩放。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学导论）正是以这种方式阐述动量与碰撞。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。