详细解答

STEP II 2009，第 1 题

纯数学 · 曲线的对称性

STEP II 2009，第 1 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/09-s2-q1

关键思路

这一题几乎不用计算：靠对称性（symmetry）就能完成大部分工作。两条曲线对直线 $y = x$ 和 $y = -x$ 作反射（reflection）后都保持不变，所以只要有了一个交点，其余交点都可以由它反射得到。接着，由这四点的位置形状便可推出长方形（rectangle）。至于面积，我们根本不必求出 α 和 β 本身：答案原来只需要它们的一个组合，而这个组合可以直接由 $\alpha^4 + \beta^4 = u$ 和 $\alpha\beta = v$ 得到。

解答

对称轴

如果把曲线上任意一点对某条直线作反射，所得的点仍然在曲线上，我们就说该曲线对这条直线对称。我们需要的四个反射是

$$(x, y) \mapsto (-x, y), \quad (x, y) \mapsto (x, -y), \quad (x, y) \mapsto (y, x), \quad (x, y) \mapsto (-y, -x),$$

它们分别是对 $x = 0$、$y = 0$、$y = x$ 和 $y = -x$ 的反射。

曲线 $x^4 + y^4 = u$。表达式 $x^4 + y^4$ 在这四个映射下都保持不变，因为四次方与正负号无关，而且表达式对 x 和 y 是对称的。所以这条曲线有四条对称轴（lines of symmetry）：

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad y = x, \qquad y = -x.$$

曲线 $xy = v$。把 x 和 y 互换，xy 保持不变；$(x, y) \mapsto (-y, -x)$ 也是如此，因为 $(-y)(-x) = xy$。只改变其中一个坐标的正负号，会把 xy 变成 $-xy$，而由于 $v > 0$，点 $(-x, y)$ 便落在 $xy = -v$ 上，而不在我们的曲线上。所以这条等轴双曲线（rectangular hyperbola）恰好

有两条对称轴：

$$y = x, \qquad y = -x.$$

四个交点

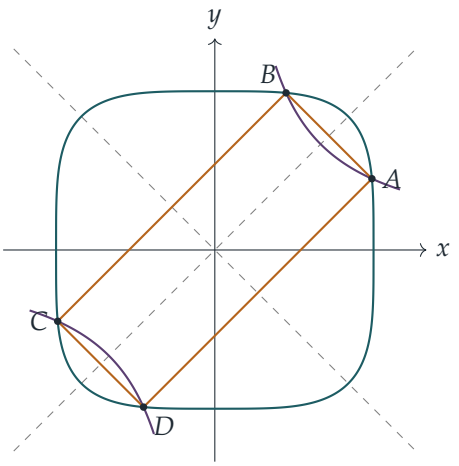
设 S 为对 $y = x$ 的反射，T 为对 $y = -x$ 的反射。两者都把两条曲线各自映射到自身，所以都把交点映射到交点。由 $A = (\alpha, \beta)$ 出发，我们得到

$$S(A) = (\beta, \alpha), \qquad T(A) = (-\beta, -\alpha), \qquad T(S(A)) = (-\alpha, -\beta).$$

因为 $\alpha > \beta > 0$，这四点互不相同。此外再没有其他交点。把 $y = v/x$ 代入四次曲线（quartic）的方程，得 $x^8 - ux^4 + v^4 = 0$，这是 x^4 的二次方程，最多有两个正根，所以 x 最多有四个实数值。

要按逆时针方向为这些点命名，可以看它们的极角（polar angle）。由于 $0 < \beta < \alpha$，点 A 的极角 θ 满足 $0 < \theta < 45°$。于是 (β, α) 的极角是 $90° - \theta$，$(-\alpha, -\beta)$ 的极角是 $180° + \theta$，而 $(-\beta, -\alpha)$ 的极角是 $270° - \theta$。这些角按此次序递增，所以

$$B = (\beta, \alpha), \qquad C = (-\alpha, -\beta), \qquad D = (-\beta, -\alpha).$$



（图中所示为 $u = 81$、$v = 4$ 的情况：四次曲线以蓝绿色表示，双曲线以紫红色表示。）

$ABCD$ 是长方形

对角线是 AC 和 BD。AC 的中点是 $(\frac{\alpha-\alpha}{2}, \frac{\beta-\beta}{2}) = (0, 0)$，同样地，$BD$ 的中点也是 $(0, 0)$。所以两条对角线互相平分，$ABCD$ 是平行四边形（parallelogram）。它们的长度是

$$AC = \sqrt{(2\alpha)^2 + (2\beta)^2} = 2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \qquad BD = \sqrt{(2\beta)^2 + (2\alpha)^2} = 2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2},$$

两者相等。对角线相等的平行四边形是长方形，所以 $ABCD$ 是长方形。

想一想 为甚么对角线相等的平行四边形必定是长方形?

四个顶点与 O 的距离同为 $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$，所以它们都在以 O 为圆心的一个圆上，而 AC 和 BD 是这个圆的直径。根据半圆上的圆周角（angle in a semicircle）定理，$ABCD$ 的每一只角都是直角。如果想直接验证，则有 $\overrightarrow{AB}=(\beta-\alpha,\ \alpha-\beta)$ 和 $\overrightarrow{BC}=(-\alpha-\beta,\ -\alpha-\beta)$，其纯量积（scalar product）为

$$-(\beta-\alpha)(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=(\alpha+\beta)[(\alpha-\beta)-(\alpha-\beta)]=0.$$

面积

边长是

$$AB=\sqrt{2(\alpha-\beta)^2}=\sqrt{2}\,(\alpha-\beta),\qquad BC=\sqrt{2(\alpha+\beta)^2}=\sqrt{2}\,(\alpha+\beta),$$

这里用了 $\alpha>\beta>0$ 来取正平方根。所以

$$\text{面积}=AB\cdot BC=2(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=2(\alpha^2-\beta^2).$$

现在利用 A 同时在两条曲线上这个事实，即 $\alpha^4+\beta^4=u$ 和 $\alpha\beta=v$。于是

$$(\alpha^2-\beta^2)^2=\alpha^4+\beta^4-2\alpha^2\beta^2=u-2v^2.$$

由于 $\alpha^2-\beta^2>0$，我们取正根，得

$$\boxed{\text{长方形面积}ABCD=2\sqrt{u-2v^2}}$$

这也说明，题目假设有四个不同的交点，就必然有 $u>2v^2$。如果 $u=2v^2$，则 $\alpha=\beta$，两条曲线只是相切。

当 $u=81$ 及 $v=4$ 时：$u-2v^2=81-32=49$，所以面积是 $2\times7=14$，与题目要求相符。

验算

当 $u=81$、$v=4$ 时，以数值方法解 $x^8-81x^4+256=0$，得 $\alpha\approx2.9690$ 及 $\beta=4/\alpha\approx1.3472$。于是 $2(\alpha^2-\beta^2)\approx14.000$，而对四个顶点使用鞋带公式（shoelace formula）也得到相同的面积。当 u 下降并趋向 $2v^2$ 时，每个象限内的两点在 $y=x$ 上合而为一，长方形压扁成一条线段，与面积 $2\sqrt{u-2v^2}\to0$ 吻合。

常见错误

- 把坐标轴当作 $xy=v$ 的对称轴。对坐标轴作反射，会把第一象限的分支送到第二象限，而那里 $xy<0$。

- 把各点的次序标错，例如取 $B = (-\alpha, -\beta)$。这样 $ABCD$ 便会连成一个交叉四边形。
- 试图明确地解出 α 和 β。面积只需要 $\alpha^2 - \beta^2$，而它可以直接由 u 和 v 得到。

STEP 之外

保持 $x^4 + y^4 = u$ 不变的四个反射和各个旋转，构成正方形的对称群（symmetry group），即阶为 8 的二面体群（dihedral group）。双曲线只保留了其中一个阶为 4 的子群（subgroup）（两个反射、半周旋转和恒等变换）。两条曲线共有的对称变换会把交点互相置换，而像这样借着群的作用来寻找对象，正是大学一年级群论（group theory）的一个主题。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（环、域与群）是认识这些概念的好起点。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。