详细解答

STEP I 2009，第 9 题

力学 · 相撞的抛体

STEP I 2009，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

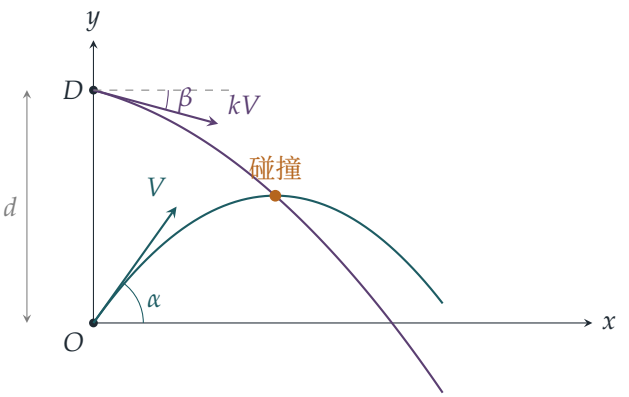
step.maths.org/questions/09-s1-q9

关键思路

两个只受重力作用的质点（particle）具有相同的加速度，所以比较两者位置时，$-\frac{1}{2}gt^2$ 项会互相抵消：相对于对方而言，它们是以恒定速度沿直线运动。碰撞（collision）的意思是在同一时刻 T，两者的水平位移相等，垂直位移也相等。水平方向的方程立即给出余弦关系式。垂直方向的方程含有 β，我们利用 $\sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta$ 和余弦关系式把它消去。

解答

我们把 P 和 Q 当作在重力下自由运动的质点，不计空气阻力（air resistance）。要令两者相撞，它们必须在同一铅垂平面内、朝同一水平方向抛出。取 O 为原点，x 轴沿该水平方向，y 轴垂直向上，于是 D 的坐标为 $(0, d)$。



在时刻 t，两质点的位置为

$$\begin{aligned} P:&\quad x = Vt\cos\alpha, && y = Vt\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2,\\ Q:&\quad x = kVt\cos\beta, && y = d - kVt\sin\beta - \tfrac{1}{2}gt^2, \end{aligned}$$

其中 Q 的垂直速度带负号，是因为 β 是从水平线向下量度的。

余弦关系式与 T 的方程

碰撞时，$t = T > 0$，而且两者的坐标相同。水平方向上，

$$VT\cos\alpha = kVT\cos\beta,$$

两边除以 $VT \neq 0$，便得 $\cos\alpha = k\cos\beta$，正是所求。

垂直方向上，两边的 $-\frac{1}{2}gT^2$ 项互相抵消，余下

$$VT\sin\alpha = d - kVT\sin\beta, \qquad \text{所以} \qquad kVT\sin\beta = d - VT\sin\alpha.$$

想一想 怎样消去 β?

我们已知 $k\cos\beta$ 可用 α 表示，所以把方程平方，引入 $k^2\sin^2\beta$，而

$$k^2\sin^2\beta = k^2 - k^2\cos^2\beta = k^2 - \cos^2\alpha.$$

把垂直方向的方程平方再代入，

$$\begin{aligned} (k^2 - \cos^2\alpha)V^2T^2 &= d^2 - 2dVT\sin\alpha + V^2T^2\sin^2\alpha,\\ (k^2 - \cos^2\alpha - \sin^2\alpha)V^2T^2 + 2dVT\sin\alpha - d^2 &= 0,\\ (k^2 - 1)V^2T^2 + 2dVT\sin\alpha - d^2 &= 0, \end{aligned}$$

当中用了 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$。这就是所求的方程。

把它看成 T 的二次方程（quadratic），由于 $k > 1$，两根之积为 $-d^2/((k^2-1)V^2) < 0$。所以恰好有一个正根，而这个根就是碰撞的时刻。

在 P 的最高点碰撞

P 的垂直速度为 $V\sin\alpha - gt$，当 $t = V\sin\alpha/g$ 时为零。所以这里 $T = V\sin\alpha/g$。代入二次方程，

$$(k^2-1)\frac{V^4\sin^2\alpha}{g^2} + \frac{2dV^2\sin^2\alpha}{g} - d^2 = 0.$$

乘以 g^2 并合并含 $\sin^2\alpha$ 的项，得 $\sin^2\alpha\,((k^2-1)V^4 + 2gdV^2) = g^2d^2$，所以

$$\boxed{\sin^2\alpha = \frac{g^2d^2}{V^2((k^2-1)V^2 + 2gd)}}$$

由于 $k > 1$，括号内的式子为正，所以这个表达式有意义。

不等式

由于 $\sin^2\alpha \le 1$ 而分母为正，

$$\begin{aligned} g^2d^2 &\le (k^2-1)V^4 + 2gdV^2, \\ g^2d^2 - 2gdV^2 + V^4 &\le k^2V^4, \\ (gd - V^2)^2 &\le (kV^2)^2. \end{aligned}$$

$|gd - V^2|$ 和 kV^2 都是非负的，所以取平方根后不等式（inequality）的方向不变：$|gd - V^2| \le kV^2$。特别地，$gd - V^2 \le kV^2$，即

$$gd \le (1+k)V^2,$$

正是所求。等号成立需要 $\sin^2\alpha = 1$，即 P 垂直向上抛出。

验算

- 取 $g = 10$，$V = 10$，$k = 2$，$d = 10$。公式给出 $\sin^2\alpha = \frac{100\cdot 100}{100(300+200)} = \frac{1}{5}$，所以 $T = V\sin\alpha/g = 1/\sqrt{5}$。于是二次方程成为 $3\cdot 100\cdot\frac{1}{5} + 2\cdot 10\cdot 10\cdot\frac{1}{5} - 100 = 60 + 40 - 100 = 0$。取 $\cos\beta = \cos\alpha/2$，两个质点在时刻 T 的高度都是 1。这里 $gd = 100 \le 300 = (1+k)V^2$。
- 我们作了一次数值检验：随机选取数千组 V、k、α、T，逐步推算两个质点的运动，结果证实碰撞、余弦关系式、二次方程和 $\sin^2\alpha$ 的公式全部成立，误差只在舍入误差的范围之内。
- 极限情况：若 $\alpha \to \frac{1}{2}\pi$，则 $\cos\beta \to 0$，所以两者都沿垂直方向运动。P 在时间 V/g 内上升至高度 $V^2/(2g)$，而 Q 下降了 $kV^2/g + V^2/(2g)$，所以 $d = (1+k)V^2/g$：等号成立，与预测一致。

常见错误

- 弄错 Q 的垂直速度的正负号：它是从水平线向下抛出的，所以垂直速度为 $-kV\sin\beta$。
- 保留 $\frac{1}{2}gT^2$ 项：这些项会互相抵消，T 的方程里并没有 g。
- 对 $(gd - V^2)^2 \le k^2V^4$ 取平方根时，直接写成 $gd - V^2 \le kV^2$ 而没有提及绝对值（modulus）。结论是对的，但理由是 $x \le |x|$。

STEP 之外

重力互相抵消这一点，让我们初次体会到转换参考系（frame of reference）的威力。在一个以加速度 g 自由下落的参考系中，两个质点都以恒定速率沿直线运动，碰撞问题于是化为相对速度（relative velocity）的几何问题。这正是爱因斯坦（Einstein）等效原理（equivalence principle）背后的想法，许多抛体拦截问题也因此一句话就能解决。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力学导论）对相对运动和非惯性参考系（non-inertial frame）有细致的阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。