详细解答

STEP I 2009，第 8 题

纯数学 · 圆与切线

STEP I 2009，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/09-s1-q8

关键思路

一个圆与一条直线相切（touch），当且仅当圆心到该直线的距离等于半径。各个圆 C 的圆心都位于一条通过原点的直线上，而这条直线平分（bisect）x 轴与 $3y = 4x$ 之间的夹角，所以每一个这样的圆都与这两条直线相切。因此 C 就是嵌在这个角内的整个圆族，而第 (ii) 部分的内切圆（incircle）必定是其中之一：我们只需选出同时令圆与第三条边相切的 t 值。

解答

第 (i) 部分

圆 C 的圆心为 $P = (2t, t)$，半径为 t。由于 $t > 0$，圆心位于 x 轴上方，与它的距离为 t，恰好等于半径。所以 C 与 $y = 0$ 相切，切点为 $(2t, 0)$。

直线 OP 的斜率（gradient）为 $\frac{t}{2t} = \frac{1}{2}$，所以 $\tan\alpha = \frac{1}{2}$，并且

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3},$$

这正是所要证明的。

现在设 β 为 x 轴与直线 $3y = 4x$ 之间的锐角，该直线的斜率为 $\frac{4}{3}$。于是 $\tan\beta = \frac{4}{3} = \tan 2\alpha$。由于 $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$（因为 $\tan\alpha = \frac{1}{2} < 1$），角 2α 也是锐角，而 tan 在锐角范围内是一对一（one-to-one）的，所以 $\beta = 2\alpha$。

? **想一想** 为甚么 $\beta = 2\alpha$ 可以告诉我们 C 与 $3y = 4x$ 相切?

直线 OP 与 x 轴的夹角为 α，与直线 $3y = 4x$ 的夹角为 $\beta - \alpha = \alpha$，所以 OP 平分这两条直线之间的夹角。由 P 向两条直线分别作垂线，得到两个直角三角形，它们有相同的斜边（hypotenuse）OP，而且在 O 处的角同为 α，所以两个垂直距离（perpendicular distance）相等，都是 $OP\sin\alpha$。到 x 轴的距离为 t，所以由 P 到 $3y = 4x$ 的距离也是 t，即半径。因此 C 与 $3y = 4x$ 相切。

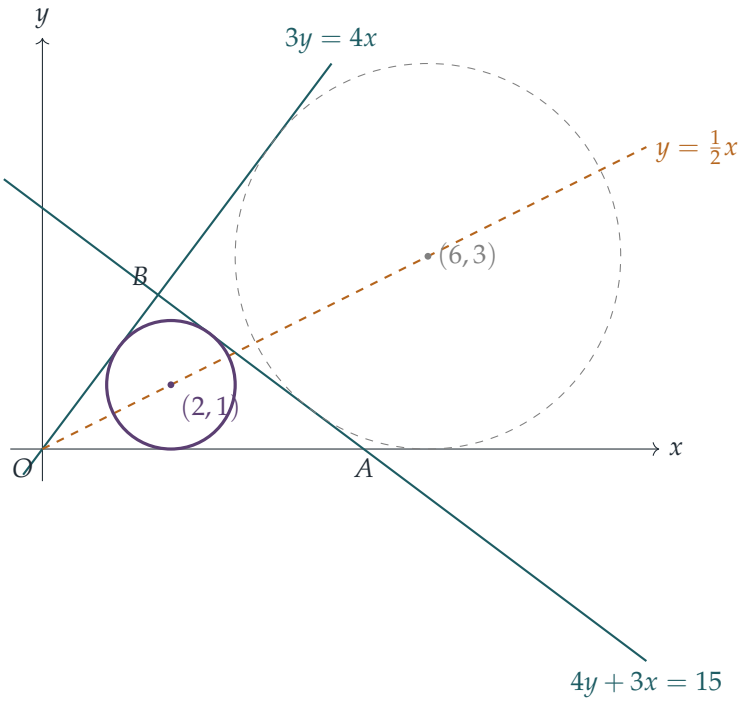
（作为覆核，由点到直线的垂直距离公式，可得由 $(2t, t)$ 到 $4x - 3y = 0$ 的距离为 $\frac{|8t-3t|}{5} = t$。）

第 (ii) 部分

首先找出这个三角形。直线 $y = 0$ 与 $3y = 4x$ 相交于 $O = (0,0)$；$y = 0$ 与 $4y + 3x = 15$ 相交于 $A = (5,0)$。至于第三个顶点，把 $y = \frac{4}{3}x$ 代入 $4y + 3x = 15$：

$$\tfrac{16}{3}x + 3x = 15 \quad \Longrightarrow \quad x = \tfrac{9}{5}, \qquad y = \tfrac{12}{5},$$

所以 $B = (\frac{9}{5}, \frac{12}{5})$。$3y = 4x$ 与 $4y + 3x = 15$ 的斜率分别为 $\frac{4}{3}$ 和 $-\frac{3}{4}$，两者之积为 -1，所以三角形在 B 处有一个直角。它的三边为 $OA = 5$、$OB = 3$ 和 $AB = 4$。



内切圆位于三角形之内，所以在 O 附近，它嵌在正 x 轴与直线 $3y = 4x$ 之间的锐角内，并与这两条直线相切。它的圆心与这两条直线等距，所以圆心位于该角的平分线上；根

据第 (i) 部分，这条平分线就是直线 $y = \frac{1}{2}x$（即直线 OP）。若圆心为 $(2t, t)$，其中 $t > 0$，则它与 $y = 0$ 的距离为 t，而这必定就是半径。所以内切圆是第 (i) 部分的圆 C 其中之一。

余下只需令 C 与第三条边 $3x + 4y - 15 = 0$ 相切。由 $(2t, t)$ 到这条直线的距离必须等于 t：

$$\frac{|6t + 4t - 15|}{5} = t \quad \Longleftrightarrow \quad |10t - 15| = 5t.$$

要么 $10t - 15 = 5t$，得 $t = 3$；要么 $15 - 10t = 5t$，得 $t = 1$。

这两个圆都与三条直线相切，但只有一个位于三角形之内。当 $t = 3$ 时，圆心 $(6, 3)$ 满足 $3x + 4y = 30 > 15$，所以它位于 AB 的另一侧，与 O（满足 $3x + 4y = 0 < 15$）分处两边：这是一个*旁切圆*（excircle），即图中的虚线圆。当 $t = 1$ 时，圆心 $(2, 1)$ 满足 $3x + 4y = 10 < 15$，而且它在 $y = 0$ 之上、$3y = 4x$ 之下，所以它位于三角形之内。一个圆若圆心在三角形之内，并与三条边都相切，则整个圆位于三角形之内，所以内切圆的圆心为 $(2, 1)$，半径为 1：

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1.$$

验算

对于两条直角边为 a, b、斜边为 c 的直角三角形，内切圆半径（inradius）为 $\frac{1}{2}(a + b - c)$；这里 $\frac{1}{2}(3 + 4 - 5) = 1$，与所得结果一致。内切圆半径亦等于面积 / 半周长 $= 6/6 = 1$。在数值上，把内心（incentre）计算为各顶点以边长加权的平均值 $\frac{4O+3A+5B}{12}$，结果恰好是 $(2, 1)$，而由 $(2, 1)$ 到三条直线的距离全都是 1。

常见错误

- 解 $|10t - 15| = 5t$ 时忽略了绝对值，只求得 $t = 3$，而这是旁切圆，不是内切圆。
- 求得两个根，却没有解释为甚么 $t = 1$ 才是位于三角形之内的那一个。
- 在第 (i) 部分，只说 $\tan\beta = \tan 2\alpha$ 所以 $\beta = 2\alpha$，却没有指出两个角都是锐角。

STEP 之外

每个三角形都有一个内切圆和三个旁切圆，而这四个圆心正是内角平分线与外角平分线的交点；这里求得的 $t = 3$ 就是与 O 相对的旁切圆。这些圆引领我们进入古典几何中一个蕴藏丰富的宝库，包括九点圆（nine-point circle），以及指出九点圆与这四个圆都相切的费尔巴哈定理（Feuerbach's theorem）。考克斯特（Coxeter）的 *Introduction to Geometry*（几何学入门）是探索这个课题的经典之作；Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（高等数学难题）则提供更多 STEP 风格的练习。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。