详细解答

STEP I 2009，第 7 题

纯数学 · 分部积分法

STEP I 2009，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/09-s1-q7

关键思路

开首的积分用的是经典的“分部积分两次，原来的积分又回来了”这一招：做完两步之后，原来的积分会在等式右边重新出现，于是我们把它当作方程中的未知数来求解。一旦对每一个整数 m 都得到 $\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \cos mx \,\mathrm{d}x$ 的公式，其后各部分就只是按部就班的整理工作：把正弦与余弦的乘积化为若干个单一余弦之和，而每一项都可以立即积分。

解答

一般的积分

记 $I_m = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \cos mx \,\mathrm{d}x$，并为简便起见设 $E = \mathrm{e}^{2\pi} - 1$。取 $u = \cos mx$ 及 $\mathrm{d}v = \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$ 作分部积分（integration by parts），

$$I_m = \Big[\mathrm{e}^x \cos mx\Big]_0^{2\pi} + m\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \sin mx \,\mathrm{d}x.$$

由于 m 是整数，$\cos 2m\pi = 1$，所以方括号一项等于 $\mathrm{e}^{2\pi} - 1 = E$。再作一次分部积分，这次取 $u = \sin mx$，

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \sin mx \,\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{e}^x \sin mx\Big]_0^{2\pi} - m\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \cos mx \,\mathrm{d}x = 0 - mI_m,$$

这是因为 $\sin 2m\pi = \sin 0 = 0$，当中再次用到 m 是整数。把两式合起来，

$$I_m = E - m^2 I_m, \qquad \text{所以} \qquad (m^2+1)I_m = E.$$

? **想一想** 我们兜了一个圈，又得回 I_m。这是否一条死路？

不是：这正是我们想要的。等式 $I_m = E - m^2 I_m$ 是关于未知数 I_m 的一次方程（linear equation），而由于 $m^2 + 1 \neq 0$，我们可以把它除过去：

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \cos mx \,\mathrm{d}x = \frac{1}{m^2+1}(\mathrm{e}^{2\pi} - 1),$$

正如所求。（$m = 0$ 的情况亦包括在内：它只是说 $\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = E$。）留意整数这个条件的作用，是令边界项（boundary terms）变得简单；若 m 不是整数，这条公式并不成立。

第 (i) 部分

用复角公式（compound-angle formulae）展开，$\sin A \sin B$ 的项互相抵消：

$$\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2\cos A \cos B.$$

取 $A = 6x$ 及 $B = x$，得 $\cos x \cos 6x = \frac{1}{2}(\cos 7x + \cos 5x)$。因此，在一般结果中取 $m = 7$ 及 $m = 5$，

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \cos x \cos 6x \,\mathrm{d}x &= \tfrac{1}{2}(I_7 + I_5) = \tfrac{1}{2}\Big(\frac{1}{50} + \frac{1}{26}\Big)E \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot \frac{26+50}{1300} E = \frac{76}{2600} E = \frac{19}{650}(\mathrm{e}^{2\pi} - 1),\end{aligned}$$

这就是所求的结果。

第 (ii) 部分

这里需要做两次积化和差(product-to-sum)。把两条复角公式相减而不是相加,得 $\cos(A-B) - \cos(A+B) = 2\sin A \sin B$，所以取 $A = 4x$、$B = 2x$，

$$\sin 2x \sin 4x = \tfrac{1}{2}(\cos 2x - \cos 6x).$$

乘以 $\cos x$，并对每个乘积使用第 (i) 部分的恒等式，

$$\begin{aligned}\sin 2x \sin 4x \cos x &= \tfrac{1}{2}\cos 2x \cos x - \tfrac{1}{2}\cos 6x \cos x \\ &= \tfrac{1}{4}(\cos 3x + \cos x) - \tfrac{1}{4}(\cos 7x + \cos 5x).\end{aligned}$$

现在每一项都可用一般结果处理，分别取 $m = 3, 1, 7, 5$：

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \sin 2x \sin 4x \cos x \,\mathrm{d}x &= \tfrac{1}{4}(I_3 + I_1 - I_7 - I_5) \\ &= \tfrac{1}{4}\Big(\frac{1}{10} + \frac{1}{2} - \frac{1}{50} - \frac{1}{26}\Big)E \\ &= \tfrac{1}{4} \cdot \frac{65 + 325 - 13 - 25}{650} E = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{352}{650} E.\end{aligned}$$

所以

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \sin 2x \sin 4x \cos x \,\mathrm{d}x = \frac{44}{325}(\mathrm{e}^{2\pi} - 1).$$

验算

- 对 $\dfrac{\mathrm{e}^x(\cos mx + m\sin mx)}{m^2+1}$ 求导，得 $\mathrm{e}^x\cos mx$，所以它是一个原函数（antiderivative）；在 2π 和 0 两处代入求值，便重新得到一般结果。
- 在第 (ii) 部分的恒等式中代入 $x=0$：左边是 0，右边是 $\frac{1}{4}(1+1-1-1)=0$。吻合。
- 以数值方法（辛普森法则，Simpson's rule）计算，第 (i) 部分的积分是 15.6236…，第 (ii) 部分的积分是 72.3619…，与 $\frac{19}{650}E$ 及 $\frac{44}{325}E$ 相符，其中 $E=\mathrm{e}^{2\pi}-1\approx 534.49$。

常见错误

- 第二次分部积分时弄错正负号：$\sin mx$ 的导数是 $+m\cos mx$，连同分部积分公式中的负号，得出的是 $-m^2 I_m$。
- 在每次积化和差时漏掉因子 $\frac{1}{2}$，以致第 (ii) 部分得到 $\frac{1}{2}$ 而不是 $\frac{1}{4}$。

STEP 之外

更利落的做法是写 $\cos mx = \operatorname{Re}\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}$，于是 $I_m = \operatorname{Re}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i}m)x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{Re}\dfrac{E}{1+\mathrm{i}m} = \dfrac{E}{1+m^2}$，完全不需要分部积分。像我们在后面各部分所做的那样，把一个函数拆成 $\cos mx$ 这些分量，正是傅里叶级数（Fourier series）的起点；傅里叶级数是大学一年级分析和微分方程（differential equations）中的核心工具。Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（微分方程入门教科书）有一段易读的介绍，而 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（以图像阐释复分析的名著）则说明了为何从指数函数的角度看问题会如此奏效。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。