详细解答

STEP I 2009，第 6 题

纯数学 · 代换积分法

> **STEP I 2009，第 6 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/09-s1-q6

关键思路

积分上下限 $1/m$ 与 m 在 $x \mapsto 1/x$ 之下互相对调，所以最自然的做法就是试用这个代换（substitution）：它把区间映射到自身，并把幂 x^{-n} 换成幂 u^{n-1}。有了第 (ii) 部分的结果，我们便可以把第 (iii) 部分中难以处理的各项，化为第 (i) 部分那个容易处理的积分。在 (iii)(b) 中，区间不再对称，但同一个代换会把 $[1,2]$ 送到 $[\frac{1}{2},1]$，于是两半又可以重新拼合起来。

解答

第 (i) 部分

以 $x+1$ 除 x^2，得

$$\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1},$$

由于在该区间上 $x+1>0$（因为 $m>0$），所以

$$\int_{1/m}^{m} \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{2}x^2 - x + \ln(x+1)\right]_{1/m}^{m}.$$

对数部分给出

$$\ln(m+1) - \ln\left(\frac{1}{m}+1\right) = \ln\frac{m+1}{(m+1)/m} = \ln m.$$

多项式部分给出

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\Big(m^2-\frac{1}{m^2}\Big)-\Big(m-\frac{1}{m}\Big) &= \Big(m-\frac{1}{m}\Big)\Big[\tfrac{1}{2}\Big(m+\frac{1}{m}\Big)-1\Big]\\ &= \frac{m^2-1}{m}\cdot\frac{m^2-2m+1}{2m}\\ &= \frac{(m-1)(m+1)(m-1)^2}{2m^2}=\frac{(m-1)^3(m+1)}{2m^2}.\end{aligned}$$

把两部分相加，即得所求结果。

第 (ii) 部分

设 $x=1/u$，则 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}u/u^2$。当 $x=1/m$ 时，$u=m$；当 $x=m$ 时，$u=1/m$。此外

$$x^n(x+1)=\frac{1}{u^n}\cdot\frac{1+u}{u}=\frac{u+1}{u^{n+1}}.$$

因此

$$\begin{aligned}\int_{1/m}^{m}\frac{1}{x^n(x+1)}\,\mathrm{d}x &= \int_{m}^{1/m}\frac{u^{n+1}}{u+1}\cdot\Big(-\frac{1}{u^2}\Big)\mathrm{d}u\\ &= \int_{1/m}^{m}\frac{u^{n-1}}{u+1}\,\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

其中负号用来把上下限对调回来。这就是所求结果。

第 (iii) 部分

(a) 把被积函数（integrand）拆开：

$$\frac{x^5+3}{x^3(x+1)}=\frac{x^2}{x+1}+\frac{3}{x^3(x+1)}.$$

积分区间是 $[\frac{1}{2},2]$，即第 (ii) 部分的区间取 $m=2$。在第 (ii) 部分中取 $n=3$，得

$$\int_{1/2}^{2}\frac{3}{x^3(x+1)}\,\mathrm{d}x=3\int_{1/2}^{2}\frac{u^2}{u+1}\,\mathrm{d}u,$$

这是第一项的三倍。由第 (i) 部分取 $m=2$，得

$$\int_{1/2}^{2}\frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x=\frac{1^3\cdot 3}{2\cdot 4}+\ln 2=\frac{3}{8}+\ln 2.$$

所以积分等于 $4(\frac{3}{8}+\ln 2)$，即

$$\int_{1/2}^{2}\frac{x^5+3}{x^3(x+1)}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}+4\ln 2.$$

(b) 现在

$$\frac{x^5+x^3+1}{x^3(x+1)}=\frac{x^2}{x+1}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x^3(x+1)}.$$

想一想 现在的区间是 $[1,2]$，并非 $[1/m, m]$ 的形式。第 (ii) 部分还能派上用场吗?

可以：代换 $x = 1/u$ 在任何由正数组成的区间上都适用，只是上下限会随之移动。计算与第 (ii) 部分完全相同，其中 $x = 1$ 对应 $u = 1$，$x = 2$ 对应 $u = \frac{1}{2}$，由此可得

$$\int_1^2 \frac{1}{x^3(x+1)}\,\mathrm{d}x = \int_{1/2}^1 \frac{u^2}{u+1}\,\mathrm{d}u.$$

它的被积函数与第一项相同，而区间恰好相邻，所以两者合起来就是第 (i) 部分取 $m = 2$ 时的积分：

$$\int_1^2 \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x + \int_{1/2}^1 \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int_{1/2}^2 \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{8} + \ln 2.$$

余下的一项是

$$\int_1^2 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \ln 3 - \ln 2.$$

相加得

$$\int_1^2 \frac{x^5+x^3+1}{x^3(x+1)}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{8} + \ln 2 + \ln 3 - \ln 2 = \frac{3}{8} + \ln 3.$$

验算

- 在第 (i) 部分中，$m = 1$ 时积分区间只有一点，而右边确实是 $0 + \ln 1 = 0$。把 m 换成 $1/m$ 应该令积分变号（上下限对调），而公式的确会变号。
- 用辛普森法则（Simpson's rule）计算，(iii)(a) 得 4.272589，与 $\frac{3}{2} + 4\ln 2 \approx 4.272589$ 吻合；(iii)(b) 得 1.473612，与 $\frac{3}{8} + \ln 3 \approx 1.473612$ 吻合。
- (b) 的合理性检查：在 $[1,2]$ 上，被积函数由 1.5 下降至约 1.37，然后上升至约 1.71，所以答案接近 1.47 是合理的。

常见错误

- 忘记 $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u/u^2$ 中的负号，或忘记对调上下限；两者都必须做，而它们会互相抵消。
- 在 (iii)(b) 中，把第 (ii) 部分当作区间是 $[\frac{1}{2}, 2]$ 来套用。代换把 $[1,2]$ 移到 $[\frac{1}{2}, 1]$，而这正是各项能够拼合起来的原因。

STEP 之外

映射 $x \mapsto 1/x$ 是区间 $[1/m, m]$ 的一个对称（symmetry），而利用定义域的对称性来找出积分之间的关系，是分析学（analysis）中反复出现的技巧。例如，$\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 0$ 就是这样证明的。在复分析（complex analysis）中，同样的反演（inversion）$z \mapsto 1/z$ 会把单位圆的内部与外部对调，并成为一件基本工具。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《复分析：可视化方法》）对反演有十分优美的几何阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。