详细解答

STEP I 2009，第 5 题

纯数学 · 约束最优化

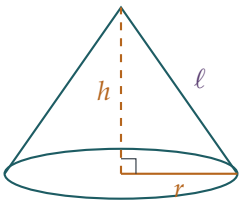
STEP I 2009，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/09-s1-q5

关键思路

这里有三个长度，但只有两个是自由的，因为 r、h 和 ℓ 由毕氏定理（Pythagoras' theorem）联系在一起：$\ell^2 = r^2 + h^2$。固定其中一个量，又会再减少一个自由度，所以在每一部分，我们都把要取驻值（stationary value）的量写成只含 r 的函数，然后求导。平方根会令代数运算变得繁复，因此改用 V^2 或 A^2 来计算会划算得多：它们取驻值的位置，与 V 或 A 取驻值的位置完全相同。



解答

在整个解答中，r、h 和 ℓ 均为正数，而且由横切面中的直角三角形可得

$$\ell^2 = r^2 + h^2.$$

由于 $V > 0$ 及 $A > 0$，V^2 的导数（derivative）是 $2V\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}$，它恰好在 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}$ 等于零时才等于零；A 的情况亦相同。因此我们可以改为求这些平方的驻点（stationary point）。

第 (i) 部分

当 A 固定时，$\ell = \dfrac{A}{\pi r}$，所以

$$h^2 = \ell^2 - r^2 = \frac{A^2}{\pi^2 r^2} - r^2.$$

（要得到一个真正的圆锥体，必须有 $h > 0$，即 $A > \pi r^2$。）于是

$$\begin{aligned} V^2 = \tfrac{1}{9}\pi^2 r^4 h^2 &= \tfrac{1}{9}\pi^2 r^4 \left(\frac{A^2}{\pi^2 r^2} - r^2\right) \\ &= \tfrac{1}{9}\left(A^2 r^2 - \pi^2 r^6\right). \end{aligned}$$

把 A 视为常数，对 r 求导，得

$$\frac{\mathrm{d}(V^2)}{\mathrm{d}r} = \tfrac{1}{9}\left(2A^2 r - 6\pi^2 r^5\right) = \tfrac{2}{9} r\left(A^2 - 3\pi^2 r^4\right).$$

由于 $r > 0$，上式恰好在以下情况等于零：

$$A^2 = 3\pi^2 r^4,$$

这就是第一个结果。取正平方根，得 $A = \sqrt{3}\,\pi r^2$，因此

$$\ell = \frac{A}{\pi r} = \frac{\sqrt{3}\,\pi r^2}{\pi r} = \sqrt{3}\, r,$$

正如题目所求。（留意 $A = \sqrt{3}\,\pi r^2 > \pi r^2$，所以这确实是一个圆锥体。）

当 r 递增并经过这个值时，V^2 的导数由正变负，所以这个驻值是极大值（maximum）：这就是在给定曲面面积（curved surface area）下体积最大的圆锥体。由 $\ell^2 = r^2 + h^2$ 还可得 $h^2 = 3r^2 - r^2 = 2r^2$，所以 $h = \sqrt{2}\, r$。

第 (ii) 部分

现在 V 是固定的，所以 $h = \dfrac{3V}{\pi r^2}$，而

$$\begin{aligned} A^2 = \pi^2 r^2 \ell^2 = \pi^2 r^2 (r^2 + h^2) &= \pi^2 r^4 + \pi^2 r^2 \cdot \frac{9V^2}{\pi^2 r^4} \\ &= \pi^2 r^4 + \frac{9V^2}{r^2}. \end{aligned}$$

把 V 视为常数，对 r 求导，得

$$\frac{\mathrm{d}(A^2)}{\mathrm{d}r} = 4\pi^2 r^3 - \frac{18V^2}{r^3},$$

它恰好在以下情况等于零：

$$V^2 = \tfrac{2}{9}\pi^2 r^6, \qquad \text{所以} \qquad V = \tfrac{\sqrt{2}}{3}\,\pi r^3$$

（因为 $V > 0$，故取正根）。

想一想 我们已求得以 r 表示的 V，但题目要求的是 h。怎样才能得到它?

再用一次体积公式：$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$。令它等于 $\frac{\sqrt{2}}{3}\pi r^3$，并约去 $\frac{1}{3}\pi r^2$，得

$$h = \sqrt{2}\, r.$$

这一次导数由负变正（当 r 很小时，$9V^2/r^2$ 这一项非常大；当 r 很大时，$\pi^2 r^4$ 这一项非常大），所以这是在给定体积下曲面面积最小的圆锥体。

想一想 两部分都得出相同的形状 $h = \sqrt{2}\, r$，这是巧合吗?

不是。如果一个圆锥体在其面积之下体积最大，那么它在其体积之下面积也必然最小：任何体积相同而面积较小的圆锥体，都可以按比例放大至原来的面积，这样它的体积就会更大，而这是不可能的。由于题目只把形状确定到相差一个缩放比例，两部分必定选出相同的比 $h : r$。

验算

- 在第 (i) 部分取 $r = 1$：则 $A = \sqrt{3}\,\pi$，$\ell = \sqrt{3}$，$h = \sqrt{2}$，而 $\pi r \ell = \sqrt{3}\,\pi$，与应有的结果一致。把 A 保持在 $\sqrt{3}\,\pi$，将 r 稍为调整至 0.99 或 1.01，所得的体积都略小一些。
- 对随机选取的固定 A 以数值方法求 V 的最大值，以及对随机选取的固定 V 求 A 的最小值，每次都得出 $h/r \approx 1.41421$，即 $\sqrt{2}$。
- 量纲（dimensions）：A^2 和 $\pi^2 r^4$ 都是（长度）^{4}；V^2 和 $\pi^2 r^6$ 都是（长度）^{6}。

常见错误

- 忘记了 ℓ 取决于 r 和 h：在第 (i) 部分把 ℓ 当作常数，或在第 (ii) 部分把 h 当作常数，而事实上只有 A（或 V）是固定的。
- 保留着平方根直接对 V 求导；这样做是可行的，但很容易出错。先平方就完全不必用上链式法则（chain rule）。

STEP 之外

在固定某个量的情况下求另一个量的极值，是一个*约束优化*（constrained optimisation）问题。在大学里你会学到拉格朗日乘数法（Lagrange multipliers），它不必消去变量就能处理约束条件，并且解释了本题两部分之间的“对偶性”（duality）。若想找一本清晰的入

门书来学习多元微积分（multivariable calculus）和拉格朗日乘数法，可以看 Stewart 的 *Calculus*；Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 则有更多 STEP 风格的优化练习。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。