详细解答

STEP I 2009，第 4 题

纯数学 · 余弦公式

> **STEP I 2009，第 4 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/09-s1-q4

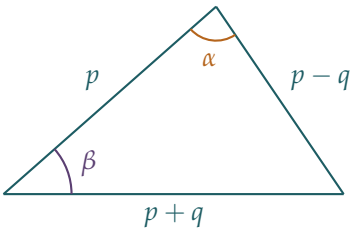
关键思路

在三角形中，最大的角对着最长的边，最小的角对着最短的边。因此，利用余弦定理（cosine rule）可以直接以 p 和 q 表示 $\cos\alpha$ 和 $\cos\beta$，而要证明的恒等式（identity）只是代数运算。至于第二部分，由 $\alpha = 2\beta$ 可用二倍角公式（double-angle formula）把 $\cos\alpha$ 以 $\cos\beta$ 表示，恒等式于是变成一条只含 $\cos\beta$ 的方程。

解答

恒等式

由于 $p-q < p < p+q$，最大的角 α 对着边 $p+q$，最小的角 β 对着边 $p-q$。



对 α 应用余弦定理，得

$$\cos\alpha = \frac{p^2 + (p-q)^2 - (p+q)^2}{2p(p-q)} = \frac{p^2 - 4pq}{2p(p-q)} = \frac{p-4q}{2(p-q)},$$

对 β 则得

$$\cos\beta = \frac{p^2+(p+q)^2-(p-q)^2}{2p(p+q)} = \frac{p^2+4pq}{2p(p+q)} = \frac{p+4q}{2(p+q)}.$$

这里我们约去了 p，由于 $p>0$，这样做是容许的。于是

$$1-\cos\alpha = \frac{2(p-q)-(p-4q)}{2(p-q)} = \frac{p+2q}{2(p-q)},$$
$$1-\cos\beta = \frac{2(p+q)-(p+4q)}{2(p+q)} = \frac{p-2q}{2(p+q)},$$

所以

$$4(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta) = \frac{(p+2q)(p-2q)}{(p-q)(p+q)} = \frac{p^2-4q^2}{p^2-q^2}.$$

另一边则是

$$\begin{aligned}\cos\alpha+\cos\beta &= \frac{(p-4q)(p+q)+(p+4q)(p-q)}{2(p^2-q^2)}\\ &= \frac{(p^2-3pq-4q^2)+(p^2+3pq-4q^2)}{2(p^2-q^2)} = \frac{p^2-4q^2}{p^2-q^2}.\end{aligned}$$

两个表达式相等，所以 $4(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)=\cos\alpha+\cos\beta$，正是所要证明的结果。

（要令三角形存在，必须有 $(p-q)+p>p+q$，即 $p>2q$。这时恒等式两边都是正数，但上面的代数运算并不依赖这一点。）

$\alpha = 2\beta$ 的情况

设 $c=\cos\beta$。那么 $\cos\alpha=\cos 2\beta = 2c^2-1$，所以 $1-\cos\alpha = 2(1-c^2) = 2(1-c)(1+c)$。代入恒等式，得

$$8(1-c)^2(1+c) = 2c^2+c-1 = (2c-1)(c+1).$$

想一想 我们可以把两边同时除以 $1+c$ 吗？

可以。β 是三角形的一只角，所以 $0<\beta<\pi$，而 $c=\cos\beta>-1$，即 $1+c\neq 0$。两边同时除以这个因子，得

$$8(1-c)^2 = 2c-1 \quad\Longrightarrow\quad 8c^2-18c+9=0 \quad\Longrightarrow\quad (4c-3)(2c-3)=0.$$

所以 $c=\frac{3}{4}$ 或 $c=\frac{3}{2}$。余弦值不可能大于 1，因此我们舍去 $\frac{3}{2}$。由此可知 $\cos\beta=\frac{3}{4}$，正是所要证明的结果。

三边之比

利用第一部分所得的 $\cos\beta$ 公式，

$$\frac{p+4q}{2(p+q)}=\frac{3}{4} \quad\Longrightarrow\quad 4p+16q=6p+6q \quad\Longrightarrow\quad p=5q.$$

这个结果满足 $p>2q$，所以三角形确实存在。它的三边是 $p-q=4q$、$p=5q$ 和 $p+q=6q$，因此三边之比是

$$4:5:6.$$

验算

在边长为 $4,5,6$ 的三角形中，由余弦定理得 $\cos\beta=\frac{25+36-16}{60}=\frac{3}{4}$ 和 $\cos\alpha=\frac{16+25-36}{40}=\frac{1}{8}$。另外 $2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2-1=\frac{1}{8}$，这就确认了 $\alpha=2\beta$（两只角都在 $(0,\pi)$ 之内，而余弦函数在这个区间上是一对一（one-to-one）的）。以数值计算，$\beta\approx 0.7227$ 弧度（radians），$\alpha\approx 1.4455$ 弧度。在这个三角形中，恒等式变成 $4\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{4}=\frac{7}{8}=\frac{1}{8}+\frac{3}{4}$。我们也用 10^5 个满足 $p>2q$ 的随机三角形测试过这条恒等式，两边之差不超过 3×10^{-15}。

常见错误

- 把角与边配错。最大的角对着的是最长的边，即 $p+q$。
- 约去因子 $1+c$ 时没有说明它为何不等于零，或者保留了 $c=\frac{3}{2}$ 这个根。
- 答案只写 $p=5q$，而没有给出三边之比 $4:5:6$。

STEP 之外

若不计缩放，边长为 $4,5,6$ 的三角形是唯一一个三边成等差数列（arithmetic progression）而最大角是最小角两倍的三角形。像“哪些三角形的边长是整数，而且各角成指定的比？”这类问题，很快就会引出丢番图方程（Diophantine equations），以及曲线上有理点（rational points）的参数化，情况与毕氏三元数（Pythagorean triples）十分相似。Davenport 的 *The Higher Arithmetic* 很适合用来了解这些想法如何发展，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 则有更多 STEP 风格的几何和三角学题目。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。