详细解答

STEP I 2009，第 3 题

纯数学 · 实根的计数

> **STEP I 2009，第 3 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/09-s1-q3

关键思路

把等式两边同时取适当的幂次来消去根号，但要留意这一步会失去甚么。平方根（square root）永不为负，所以只有同时要求 $x \geq 0$，平方这一步才可以逆推回去；实数立方根（cube root）则没有这种限制，因为每个实数都恰好有一个实数立方根。处理好这一点之后，每一次计数解的个数都归结为一个二次方程的根，而这些根的正负号可以从两根之和与两根之积看出来。

解答

第 (i) 部分：平方根方程

这里 $(a-x)^{\frac{1}{2}}$ 是指非负的平方根，所以任何解都满足 $x \geq 0$，而两边平方得 $x^2 = a - x$，即 $x^2 + x - a = 0$。反过来，若 $x \geq 0$ 且 $x^2 + x - a = 0$，则 $a - x = x^2 \geq 0$，并且 $(a-x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2} = |x| = x$。因此

$$x = (a-x)^{\frac{1}{2}} \iff x^2 + x - a = 0 \text{ 且 } x \geq 0,$$

于是我们要计数的是二次方程 $x^2 + x - a = 0$ 的非负根的个数。设它的根为 α, β（当两根为实数时），则

$$\alpha + \beta = -1, \qquad \alpha\beta = -a.$$

情况 $a > 0$。判别式（discriminant）$1 + 4a$ 为正，所以有两个实根，而两根之积 $-a$ 为负。因此一根为正、另一根为负：恰好有一个解。

情况 $a = 0$。二次方程为 $x(x+1) = 0$，两根为 0 和 -1。只有 $x = 0$ 是非负的：恰好有一个解。

情况 $a<0$。若 $a<-\frac{1}{4}$，判别式为负，根本没有实根。若 $-\frac{1}{4}\le a<0$，两根为实数，两根之积 $-a$ 为正，所以两根同号，而两根之和为 -1，所以两根皆为负。无论哪一种情况都没有非负根，因此无解。

所以当 $a\ge 0$ 时方程有一个实数解，当 $a<0$ 时没有实数解，这正是所要证明的。

第 (i) 部分：立方根方程

每个实数 t 都恰好有一个实数立方根，而且 $x=t^{\frac{1}{3}} \iff x^3=t$，当中没有正负号的条件。所以原方程等价于

$$x^3-(1+a)x+a=0.$$

各项系数之和为 $1-(1+a)+a=0$，所以 $x=1$ 必定是一个根，把对应的因式除去后得

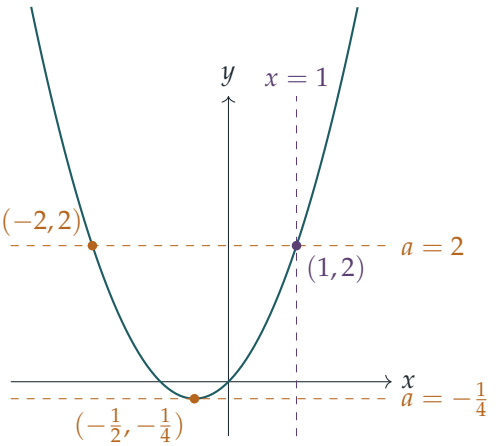
$$x^3-(1+a)x+a=(x-1)(x^2+x-a).$$

同一个二次式再次出现，而方程的解就是 $x=1$ 连同 $x^2+x-a=0$ 的实根，这次对正负号再没有限制。

> **想一想** 二次方程的根会不会与 $x=1$ 重合，或者两根彼此重合?

两种情况都会发生，而它们正是令解的个数减少的情况。当 $1+4a=0$，即 $a=-\frac{1}{4}$ 时，二次方程有重根（repeated root），该根为 $-\frac{1}{2}$。而当 $1+1-a=0$，即 $a=2$ 时，$x=1$ 是二次方程的根；这时 $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$，所以两根为 1 和 -2。

把二次方程写成 $a=x^2+x$，它的实根就是高度为 a 的水平线与抛物线（parabola）$y=x^2+x$ 相交之处，而这条抛物线的最低点是 $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$。额外的解 $x=1$ 对应抛物线上的点 $(1,2)$。



综合各种情况，相异实数解的个数如下：

- $a < -\frac{1}{4}$：二次方程没有实根，所以只有**一个**解，即 $x = 1$；
- $a = -\frac{1}{4}$：解为 1 和 $-\frac{1}{2}$，所以有**两个**；
- $-\frac{1}{4} < a < 2$ 或 $a > 2$：二次方程有两个相异的根，两者都不等于 1，再加上 $x = 1$，所以有**三个**；
- $a = 2$：解为 1 和 -2，所以有**两个**。

第 (ii) 部分

与第 (i) 部分完全一样，平方根是非负的，所以

$$x = (b + x)^{\frac{1}{2}} \iff x^2 - x - b = 0 \text{ 且 } x \geq 0,$$

（反方向成立，是因为由 $x \geq 0$ 和 $b + x = x^2$ 可得 $(b + x)^{\frac{1}{2}} = |x| = x$）。现在 $x^2 - x - b = 0$ 的两根之和为 1，两根之积为 $-b$，而判别式为 $1 + 4b$。

情况 $b < -\frac{1}{4}$。没有实根，所以**没有**解。

情况 $b = -\frac{1}{4}$。二次方程为 $(x - \frac{1}{2})^2 = 0$，而 $x = \frac{1}{2} \geq 0$，所以有**一个**解。

情况 $-\frac{1}{4} < b < 0$。有两个相异实根，两根之积 $-b$ 为正，所以两根同号，而两根之和 1 为正，所以两根皆为正：有**两个**解。

情况 $b = 0$。二次方程为 $x(x - 1) = 0$，而 0 和 1 都是非负的：有**两个**解。（事实上 $0 = \sqrt{0}$ 而 $1 = \sqrt{1}$。）

情况 $b > 0$。有两个实根，两根之积为负，所以一正一负：有**一个**解。

总结：当 $b < -\frac{1}{4}$ 时无解；当 $b = -\frac{1}{4}$ 时有一个解；当 $-\frac{1}{4} < b \leq 0$ 时有两个解；当 $b > 0$ 时有一个解。

验算

- 从图像来看，第 (ii) 部分是问直线 $y = x$ 与半抛物线 $y = \sqrt{b + x}$ 在何处相交，而这条半抛物线由 $(-b, 0)$ 开始。当 $b = -\frac{1}{5}$ 时，解为 $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{5}}$，约为 0.276 和 0.724，两者都满足 $x = \sqrt{x - 0.2}$，准确至小数点后多个位。
- 在立方根方程中取 $a = 2$，$x = 1$ 和 $x = -2$ 都成立：$(3 \cdot (-2) - 2)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{1}{3}} = -2$。
- 我们用电脑在细密的格点上计数了每个方程的根的个数，所取的 a 和 b 的值涵盖每个分界点（$-\frac{1}{4}$、0、2）的两侧，所得的个数与上面的分情况讨论一致。

常见错误

- 平方之后忘记了 $x \geq 0$：这样会得出第 (i) 部分对每个 $a > -\frac{1}{4}$ 都有两个解，这是错的。
- 对立方根方程也加上 $x \geq 0$ 的条件。负数的立方根是名正言顺的实数。
- 遗漏了 $a = 2$ 的情况：这时一次因式的根 $x = 1$ 同时也是二次式的根，所以三个解之中有两个合而为一。

STEP 之外

关键在于：在 $\mathbb{R}$ 上，平方不是可逆的运算，立方却是。$x \mapsto x^3$ 是 $\mathbb{R}$ 到自身的双射（bijection），而 $x \mapsto x^2$ 则不是，所以要先选定非负的分支（branch），才谈得上“那个”平方根。把形如 $x = f(x)$ 的方程看成不动点（fixed point）问题，并在参数变动时计数不动点的个数，就是分歧理论（bifurcation theory）的起点；在这套理论中，解会成对地诞生（如在 $a = -\frac{1}{4}$ 处），或者互换位置（如在 $a = 2$ 处）。若想细读有关函数、反函数（inverse）和连续性（continuity）的严谨论述，可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*（实分析入门教材）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。