详细解答

STEP I 2009，第 2 题

纯数学 · 三次曲线的切线

> **STEP I 2009，第 2 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/09-s1-q2

本题在 *Beyond STEP* 第 1.9 节三次曲线的切线中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch01/tangents-cubic.html

关键思路

切线（tangent）在切点处与曲线相交两次：把切线方程代入曲线方程时，切点对应的是一个重根（repeated root）。一旦知道三次方程（cubic）的一个重根，余下的根便可藉因式分解直接得出，而这第三个交点的坐标原来是有理数。消去分母之后，曲线方程就化成一个立方和。

解答

在 $(-a, b)$ 处的切线

首先，$(-a, b)$ 确实在曲线上，因为 $x^3 + a^3 + b^3 = -a^3 + a^3 + b^3 = b^3 = y^3$。

把 $y^3 = x^3 + a^3 + b^3$ 对 x 作隐函数微分（implicit differentiation）（其中 a 和 b 为常数），得

$$3y^2 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2, \qquad \text{所以} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x^2}{y^2}$$

在 $y \neq 0$ 的地方均成立。在 $(-a, b)$ 处，由于 $b > 0$，斜率（gradient）为 a^2/b^2。因此切

线为

$$\begin{aligned} y - b &= \frac{a^2}{b^2}(x + a) \\ b^2y - b^3 &= a^2x + a^3 \\ b^2y - a^2x &= a^3 + b^3, \end{aligned}$$

正是所需的结果。

当 $a = 1, b = 2$ 时的交点

现在曲线是 $y^3 = x^3 + 9$，而在 $(-1, 2)$ 处的切线是 $4y - x = 9$，即 $y = \frac{1}{4}(x + 9)$。代入曲线方程：

$$\begin{aligned} \frac{(x+9)^3}{64} &= x^3 + 9 \\ x^3 + 27x^2 + 243x + 729 &= 64x^3 + 576 \\ 0 &= 63x^3 - 27x^2 - 243x - 153. \end{aligned}$$

每个系数都可被 9 整除，全式除以这个数后得

$$7x^3 - 3x^2 - 27x - 17 = 0,$$

这正是题目要求的三次方程。

求 p, q, r, s

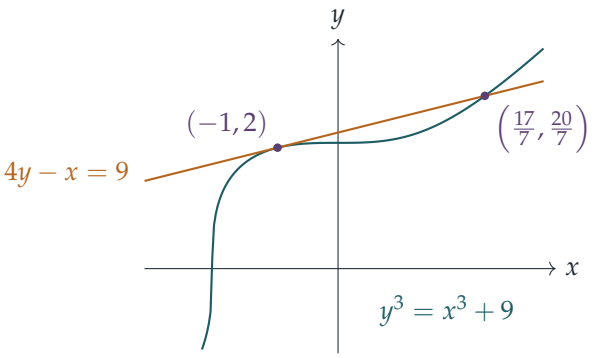
? **想一想** 我们已经知道这个三次方程的一个根。为甚么它应该是一个二重根?

直线在 $x = -1$ 处与曲线相切，所以 $x = -1$ 是重根：在切点附近，直线与曲线在一阶上吻合，因此两者之差在该处以二阶趋于零。故此 $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ 是一个因式。比较 x^3 项和常数项，另一个因式必定是 $7x - 17$，我们可以验证：

$$(x + 1)^2(7x - 17) = 7x^3 + 14x^2 + 7x - 17x^2 - 34x - 17 = 7x^3 - 3x^2 - 27x - 17.$$

所以切线与曲线再次相交于 $x = \frac{17}{7}$ 处，而在该处

$$y = \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{17}{7} + 9\right) = \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{80}{7} = \tfrac{20}{7}.$$



由于这一点在 $y^3 = x^3 + 9$ 上，

$$\left(\frac{20}{7}\right)^3 = \left(\frac{17}{7}\right)^3 + 9.$$

乘以 7^3 得 $20^3 = 17^3 + 9 \cdot 7^3$。最后一项并不是立方数，但 $9 = 1 + 8 = 1^3 + 2^3$，所以

$$9 \cdot 7^3 = 7^3 + 2^3 \cdot 7^3 = 7^3 + 14^3.$$

（原来的形式 $a^3 + b^3$（其中 $a = 1, b = 2$）就在这里重新出现。）因此

$$20^3 = 17^3 + 14^3 + 7^3,$$

我们可取 $p = 20, q = 17, r = 14, s = 7$（后三个数的次序可任意排列）。

验算

直接计算：$17^3 + 14^3 + 7^3 = 4913 + 2744 + 343 = 8000 = 20^3$。此外，三次方程的三个根是 $-1, -1, \frac{17}{7}$，其和为 $\frac{3}{7}$，其积为 $\frac{17}{7}$，与从系数读出的 $3/7$ 和 $17/7$ 相符。以数值方法计算 $y = \sqrt[3]{x^3 + a^3 + b^3}$ 在 $x = -a$ 处的导数，结果与 a^2/b^2 一致。

常见错误

- 没有利用二重根：试图从头解这个三次方程，而不是先除去因式 $(x + 1)^2$。
- 停在 $20^3 = 17^3 + 3087$ 这一步。我们需要的是立方相加的正整数，而 $3087 = 9 \cdot 7^3$ 必须拆成 $7^3 + 14^3$。

STEP 之外

这是处理三次曲线的经典*切线法*（tangent method）。一条直线与三次曲线相交于三点（按重数计算），所以两个有理点（rational point）（或如本题般，一个点计算两次）便

会产生第三个有理点。在椭圆曲线（elliptic curve）上，这种弦切作图法（chord-and-tangent construction）成为一个群运算法则（group law），是现代数论中一大领域的起点。Davenport 的 *The Higher Arithmetic* 讨论了这类丢番图方程（Diophantine equation），而 Silverman 与 Tate 的 *Rational Points on Elliptic Curves* 则完整地发展了当中的几何。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。