详细解答

STEP I 2009，第 13 题

概率与统计 • 排列与游程

STEP I 2009，第 13 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/09-s1-q13

关键思路

重要的只是女孩所占的位置，而不是哪个女孩或男孩是谁。因此，与其处理 $(n+3)!$ 种次序，不如直接选出女孩所占的三个位置所组成的集合：$\binom{n+3}{3}$ 个集合中每一个都是等可能的。要数出符合条件的集合，最简单的做法是先把 n 个男孩排成一行，再考虑女孩要放进男孩之间及两旁的哪些空隙。

解答

由于全部 $(n+3)!$ 种次序都是等可能的，而女孩的每一个三位置集合都对应相同数目（即 $3!\,n!$）的次序，所以女孩位置的集合在

$$\binom{n+3}{3} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}$$

个可能的集合上均匀分布（uniformly distributed）。在整个解答中，K 只可能是 1、2 或 3。

排成一行的 n 个男孩会产生 $n+1$ 个空隙（第一个男孩之前有一个，最后一个男孩之后有一个，相邻男孩之间共有 $n-1$ 个）：



把女孩放进空隙（同一个空隙可以放任意多个）便得到一行，而每一行都恰好以一种方式产生。同一个空隙内的女孩彼此相邻；不同空隙内的女孩之间则至少隔着一个男孩。

第 (i) 部分

$K=3$ 表示三个女孩全部连成一段，即她们都放进同一个空隙。空隙有 $n+1$ 种选法，所以

$$\mathrm{P}(K=3)=\frac{n+1}{\binom{n+3}{3}}=\frac{6(n+1)}{(n+3)(n+2)(n+1)}=\frac{6}{(n+2)(n+3)}.$$

（等价的说法：由三个连续位置组成的一段，可以从第 $1,2,\ldots,n+1$ 个位置中任何一个开始。）

第 (ii) 部分

$K=1$ 表示没有两个女孩相邻，即三个女孩分别在三个不同的空隙内。我们从 $n+1$ 个空隙中选出 3 个，共有 $\binom{n+1}{3}$ 种选法，然后在每个空隙放一个女孩。因此

$$\mathrm{P}(K=1)=\frac{\binom{n+1}{3}}{\binom{n+3}{3}}=\frac{(n+1)n(n-1)}{(n+3)(n+2)(n+1)}=\frac{n(n-1)}{(n+2)(n+3)},$$

正是所求。（当 $n=0$ 或 1 时，空隙不足，而公式亦正确地给出 0。）

> ? **想一想** 为甚么数目是 $\binom{n+1}{3}$，而不是 $\binom{n+1}{3}\times 3!$?

我们数的是位置的集合，而不是有名有姓的孩子的次序。选定使用哪三个空隙，女孩的位置便完全确定；至于哪个女孩坐在哪里，早已包含在“每个位置集合都是等可能的”这个论断之中。

第 (iii) 部分

首先我们需要求 $\mathrm{P}(K=2)$。由于 $K\in\{1,2,3\}$，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(K=2)&=1-\frac{6}{(n+2)(n+3)}-\frac{n(n-1)}{(n+2)(n+3)}\\&=\frac{(n^2+5n+6)-6-(n^2-n)}{(n+2)(n+3)}=\frac{6n}{(n+2)(n+3)}.\end{aligned}$$

作为验算，我们直接数一次：$K=2$ 表示有一对女孩在同一个空隙，而第三个女孩在另一个空隙。先为那一对选空隙，再为单独的一个选另一个空隙，共得 $(n+1)n$ 个集合，而 $(n+1)n/\binom{n+3}{3}=6n/((n+2)(n+3))$，与上面的结果相同。

于是

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(K) &= 1\cdot\frac{n(n-1)}{(n+2)(n+3)} + 2\cdot\frac{6n}{(n+2)(n+3)} + 3\cdot\frac{6}{(n+2)(n+3)}\\ &= \frac{n^2+11n+18}{(n+2)(n+3)} = \frac{(n+2)(n+9)}{(n+2)(n+3)}\\ &= \frac{n+9}{n+3}.\end{aligned}$$

验算

- $n=0$：只有女孩，所以必定有 $K=3$，而 $\frac{n+9}{n+3}=3$。
- $n=1$：可能的排列是 GGGB、GGBG、GBGG、BGGG，四者等可能，所以 $K=3$ 或 2 的概率各为 $\frac{1}{2}$，而 $\mathrm{E}(K)=\frac{5}{2}=\frac{10}{4}$。
- 当 $n\to\infty$ 时，$\mathrm{E}(K)\to 1$：男孩很多时，女孩几乎不会相邻。
- 我们以精确分数列举了 $n=0,\ldots,9$ 的所有位置集合(例如 $n=3$ 时得 $\mathrm{P}(K=1,2,3)=\frac{1}{5},\frac{3}{5},\frac{1}{5}$ 及 $\mathrm{E}(K)=2$)，并对 $n\le 4$ 列举了有标记的孩子的全部 $(n+3)!$ 种次序；所有结果都吻合。

常见错误

- 在同一个分数中，把有序排列的数目与位置集合的数目混在一起。选定一个样本空间（sample space），然后贯彻使用。
- 忘记两端的两个空隙，结果用了 $n-1$ 个空隙而不是 $n+1$ 个。

STEP 之外

“男孩造出空隙，女孩放进空隙”这个技巧，就是隔板法（stars and bars）的想法；而随机排列中最长连段（longest run）这个一般问题，则是一个经典课题：对于很长的随机序列，最长连段的长度大致按序列长度的对数增长。大学本科的概率课程会通过指示变量（indicator variables）和母函数（generating functions）来处理这些问题。Grimmett and Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率论入门教材）是学习如何发展这类计数论证的好去处。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。