详细解答

STEP I 2009，第 12 题

概率与统计 · 概率与不等式

> **STEP I 2009，第 12 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/09-s1-q12

关键思路

这里每个概率（probability）都是各袋糖果数目之积的和，再除以总数的某次幂，所以每次比较最终都是比较两个以 a, b, c 为变量的多项式（polynomial）。开首的不等式（inequality）$x^2 + y^2 \geq 2xy$ 正是为此而设的工具。在第 (ii) 部分，直接数算“恰好两颗同色”相当繁琐。先数算另外两种情况（全部同色、全部不同色），再从 1 中减去，会容易得多。

解答

不等式

对任意实数 x 和 y，

$$x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2 \geq 0,$$

因为实数的平方永不为负。所以 $x^2 + y^2 \geq 2xy$，等号恰好在 $x = y$ 时成立。

第 (i) 部分

每个袋有 $a + b$ 颗糖果，而两次抽取来自不同的袋，所以互相独立（independent）。设 S 为两颗糖果同色的事件（event），D 为两颗糖果不同色的事件。那么

$$\mathrm{P}(S) = \mathrm{P}(\text{红、红}) + \mathrm{P}(\text{蓝、蓝}) = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b} + \frac{b}{a+b} \cdot \frac{a}{a+b} = \frac{2ab}{(a+b)^2},$$

$$\mathrm{P}(D) = \mathrm{P}(\text{红、蓝}) + \mathrm{P}(\text{蓝、红}) = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b} = \frac{a^2 + b^2}{(a+b)^2}.$$

两个分母相等且为正数，而由上面的不等式可知 $2ab \leq a^2 + b^2$。因此 $\mathrm{P}(S) \leq \mathrm{P}(D)$，正如所求，等号只在 $a = b$ 时成立。

第 (ii) 部分

记 $n = a + b + c$，即每个袋中糖果的数目。各袋的内容如下：

	红	白	黄
第 1 袋	a	b	c
第 2 袋	b	c	a
第 3 袋	c	a	b

三次抽取互相独立，所以从各袋（按次序）抽出某一指定颜色的概率，就是三个相应数目之积除以 n^3。设 A 为三颗糖果全部同色的事件，T 为恰好两颗同色的事件，E 为三颗全部不同色的事件。这三个事件涵盖了所有可能，而且互不重叠。

全部同色。 沿表中每一直行向下读，

$$\mathrm{P}(A) = \frac{abc + bca + cab}{n^3} = \frac{3abc}{n^3}.$$

全部不同色。 从第 1、2、3 袋抽出的颜色，构成红、白、黄的 $3! = 6$ 种排列之一：

红白黄：$a \cdot c \cdot b$　红黄白：$a \cdot a \cdot a$　白红黄：$b \cdot b \cdot b$

白黄红：$b \cdot a \cdot c$　黄红白：$c \cdot b \cdot a$　黄白红：$c \cdot c \cdot c$

所以

$$\mathrm{P}(E) = \frac{a^3 + b^3 + c^3 + 3abc}{n^3}.$$

? **想一想** 怎样才能由这两个答案得出 $\mathrm{P}(T)$，而不必列出余下的 18 个结果?

由于 $\mathrm{P}(T) = 1 - \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(E)$，我们需要 $n^3 = (a + b + c)^3$ 的展开式。它包含三个立方项、六个形如 a^2b 而系数为 3 的项，以及系数为 6 的 abc：

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3\left(a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2\right) + 6abc.$$

因此

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(T) &= \frac{n^3 - 3abc - (a^3 + b^3 + c^3 + 3abc)}{n^3} \\ &= \frac{3\left(a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2\right)}{(a + b + c)^3},\end{aligned}$$

这就是题目给出的结果。三颗糖果全部同色的概率是

$$\mathrm{P}(A) = \frac{3abc}{(a + b + c)^3}.$$

推论。 把六个项按公因子两两分组：

$$a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2 = a\left(b^2 + c^2\right) + b\left(c^2 + a^2\right) + c\left(a^2 + b^2\right).$$

由开首的不等式，$b^2 + c^2 \geq 2bc$；又因为 $a > 0$，乘上后不等号方向不变：$a(b^2 + c^2) \geq 2abc$。同理 $b(c^2 + a^2) \geq 2abc$ 及 $c(a^2 + b^2) \geq 2abc$。相加得

$$a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2 \geq 6abc.$$

乘以 $3/n^3 > 0$，

$$\mathrm{P}(T) \geq \frac{18abc}{n^3} = 6 \cdot \frac{3abc}{n^3} = 6\,\mathrm{P}(A),$$

正如所求。等号成立需要 $b = c$、$c = a$ 和 $a = b$ 同时成立，所以只在 $a = b = c$ 时成立。

验算

- 当 $a = b = c$ 时，每个袋中三种颜色各占三分之一，所以 $\mathrm{P}(A) = 3 \cdot \frac{1}{27} = \frac{1}{9}$ 及 $\mathrm{P}(E) = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$，余下 $\mathrm{P}(T) = \frac{2}{3} = 6 \cdot \frac{1}{9}$：这正是等号成立的情况。
- 当 $a, b, c = 1, 2, 3$ ($n = 6$) 时：$\mathrm{P}(A) = \frac{18}{216} = \frac{1}{12}$、$\mathrm{P}(E) = \frac{54}{216} = \frac{1}{4}$ 及 $\mathrm{P}(T) = \frac{144}{216} = \frac{2}{3}$。三者之和为 1，而 $\frac{2}{3}$ 是 $\frac{1}{12}$ 的 8 倍。
- 我们以精确穷举（enumeration）的方法，对 a, b, c 由 1 至 8 的每一组取值验证了全部三条公式，并以模拟（simulation）作检验（取 $a, b, c = 2, 3, 5$，200 000 次试验得出 0.659，而 $\mathrm{P}(T)$ 的精确值为 0.66）。

常见错误

- 把各袋的内容次序写错。第 2 袋有 a 颗黄色糖果，而不是 a 颗红色糖果；像上面那样列一个表就可避免这种错误。
- 以为 $\mathrm{P}(E)$ 中每种排列都给出 abc。其实只有三种如此；红黄白、白红黄和黄白红这三种排列给出的是 a^3、b^3 和 c^3。
- 把不等式乘以 a、b 或 c 时，忘记说明 $a, b, c > 0$。

STEP 之外

最后的不等式是 Muirhead 不等式（Muirhead's inequality）的一个特例，后者是比较单项式（monomial）对称和的一般法则；在这里它说明形如 a^2b 的各项之和，不小于形如 abc 的各项之和。第 (i) 部分是同一想法在两个变量时的情况，而两者都建基于算术—几何

平均不等式（AM–GM inequality）。想进一步了解计数论证和互补事件（complementary events），可参阅 Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability*（概率论入门教科书）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。