详细解答

STEP I 2009，第 11 题

力学 · 碰撞与恢复系数

STEP I 2009，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/09-s1-q11

关键思路

每一个一维碰撞都由两条方程支配：动量守恒（conservation of momentum）和牛顿恢复定律（Newton's law of restitution）。处理能量的窍门，是把每个质点的损失写成平方差 $\frac{1}{2}m(u-p)(u+p)$，因为动量守恒把因式 $u-p$ 和 $q-v$ 连系起来。一旦抽出公因式 $u-p$，余下的括号正好就是恢复定律所描述的东西。

解答

我们把两个质点模拟为在光滑桌面上沿一条直线运动，速度以 **i** 的方向量度。由于 $u > v$，质量为 m 的质点在后面，并会追上前面的质点。水平方向没有外力，所以动量守恒：

$$mu + Mv = mp + Mq, \qquad \text{所以} \qquad M(q-v) = m(u-p). \tag{1}$$

牛顿恢复定律指出，分离速率是接近速率的 e 倍：

$$q - p = e(u-v). \tag{2}$$



碰撞前（速度沿 **i** 方向），$u > v$

第 (i) 部分

动能（kinetic energy）的损失为

$$\Delta = \tfrac{1}{2}m(u^2-p^2) + \tfrac{1}{2}M(v^2-q^2) = \tfrac{1}{2}m(u-p)(u+p) - \tfrac{1}{2}M(q-v)(q+v).$$

根据 (1)，我们可以把 $M(q-v)$ 换成 $m(u-p)$，于是可抽出因式 $\frac{1}{2}m(u-p)$：

$$\begin{aligned}\Delta &= \tfrac{1}{2}m(u-p)[(u+p)-(q+v)]\\ &= \tfrac{1}{2}m(u-p)[(u-v)-(q-p)]\\ &= \tfrac{1}{2}m(u-p)[(u-v)-e(u-v)] \qquad \text{根据 (2)}\\ &= \tfrac{1}{2}m(u-p)(u-v)(1-e),\end{aligned}$$

这正是所求的结果。

想一想 一条能量损失的公式，怎样能告诉我们关于 p 的事情?

碰撞不可能产生动能，所以 $\Delta \geq 0$。在乘积 $\frac{1}{2}m(u-p)(u-v)(1-e)$ 中，我们有 $m>0$、$u-v>0$（已知）和 $1-e>0$（因为 $e<1$）。所以 Δ 的正负号就是 $u-p$ 的正负号，而 $\Delta \geq 0$ 迫使 $u \geq p$。质量为 m 的质点不可能在 **i** 的方向上加速，这是合理的，因为 M 施加于它的冲量（impulse）是向后的。

如果你不想把 $\Delta \geq 0$ 当作物理事实来依赖，可以直接解 (1) 和 (2)：

$$p = \frac{mu+Mv-Me(u-v)}{m+M}, \qquad \text{所以} \qquad u-p = \frac{M(1+e)(u-v)}{m+M} > 0$$

对 $e \geq 0$ 成立。这就确认了 $u \geq p$，因而 $\Delta \geq 0$。

第 (ii) 部分

每个质点损失相同而非零的能量，所以

$$\tfrac{1}{2}m(u-p)(u+p) = \tfrac{1}{2}M(v-q)(v+q) \neq 0.$$

根据 (1)，$M(v-q) = -m(u-p)$，所以右边是 $-\frac{1}{2}m(u-p)(v+q)$，于是

$$\tfrac{1}{2}m(u-p)(u+p) = -\tfrac{1}{2}m(u-p)(v+q).$$

左边非零，所以 $m(u-p) \neq 0$，我们可以除以 $\frac{1}{2}m(u-p)$：

$$u+p = -(v+q), \qquad \text{即} \qquad u+v+p+q = 0. \tag{3}$$

现在 (2) 和 (3) 给出了 p 与 q 的和与差：

$$p+q = -(u+v), \qquad q-p = e(u-v),$$

所以

$$p = -\tfrac{1}{2}[(u+v)+e(u-v)], \qquad q = -\tfrac{1}{2}[(u+v)-e(u-v)].$$

我们还未用上动量守恒的完整形式，而正是它决定了 e 的值。代入 $mp+Mq=mu+Mv$ 并乘以 2：

$$\begin{aligned}-(m+M)(u+v)+(M-m)e(u-v) &= 2mu+2Mv,\\ (M-m)e(u-v) &= (m+M)(u+v)+2mu+2Mv\\ &= (M+3m)u+(3M+m)v.\end{aligned}$$

由于 $u-v>0$，而且当 $m\neq M$ 时 $M-m\neq 0$，我们可以相除而得

$$e=\frac{(M+3m)u+(3M+m)v}{(M-m)(u-v)},$$

这正是所求的结果。

验算

- 取 $m=1$、$M=3$、$u=1$、$v=-\frac{1}{2}$。公式给出 $e=\frac{6-5}{2\times\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}$。于是 $p=-\frac{1}{2}$ 及 $q=0$，而动量亦吻合：$1-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}+0$。每个质点损失 $\frac{3}{8}$ 的能量，而且 $u+v+p+q=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+0=0$。
- 当 $e=1$ 时，(i) 的公式给出零损失，这正符合完全弹性碰撞（perfectly elastic collision）应有的情况。
- 电脑以精确分数在 2000 个随机碰撞上检验了 (i)，并在 455 个满足 $0\leq e<1$ 的随机个案上检验了 (ii)。

常见错误

- 把恢复定律写反了：应该是 $q-p=e(u-v)$，即分离除以接近，而这里两者都以正数量度。
- 除以 $u-p$ 却没有说明它为何非零。题目中“非零的能量”这几个字，正是为此而设。

STEP 之外

(i) 中的因式分解，是在质心参考系（centre-of-mass frame）中考虑问题的一个漂亮结果。在这个参考系中，总动量为零，动能为 $\frac{1}{2}\mu(\text{相对速率})^2$，其中约化质量（reduced mass）为 $\mu=\frac{mM}{m+M}$，而损失则为 $\frac{1}{2}\mu(1-e^2)(u-v)^2$。约化质量和质心参考系会在二体轨道和粒子散射中再次出现。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学导论）对这些概念有细致的阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。