详细解答

STEP I 2009，第 10 题

力学 · 斜面上的连接质点

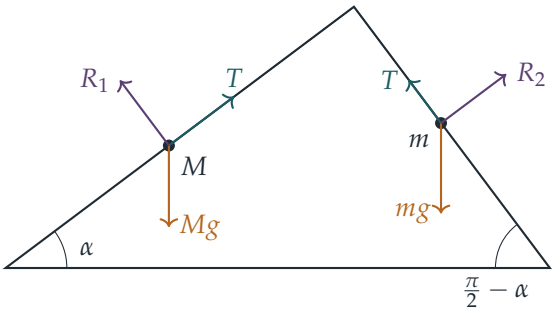
> **STEP I 2009，第 10 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/09-s1-q10

关键思路

由于绳子不可伸长（inextensible），滑轮又是光滑的，两个质点其实是作为一个系统一起运动：当 M 沿其斜面向下移动距离 s 时，m 便沿其斜面向上移动同样的距离 s，而且两边的张力（tension）相同。因此我们比较重力沿两个斜面的分量，再对每个质点应用牛顿第二定律（Newton's second law），便可求出共同的加速度。最后一部分则是关于单一变量 α 的普通微积分求极大值问题。

解答

我们把两个质点看作光滑斜面上的点质量，以一条轻而不可伸长的绳子绕过光滑滑轮相连，并假设系统由静止开始运动。设 T 为张力，R_1、R_2 分别为作用于 M 和 m 的法向反作用力（normal reaction）。



顶角为 $\pi-\alpha-(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\frac{\pi}{2}$，所以两个斜面互相垂直。重力沿倾角为 α 的斜面向下的分量是 $Mg\sin\alpha$，而沿倾角为 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ 的斜面向下的分量是 $mg\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=mg\cos\alpha$。法向

反作用力垂直于斜面，所以对沿斜面的运动没有影响。

第 (i) 部分

取“M 沿其斜面向下、m 沿其斜面向上”为正方向，加速度为 a。沿各自的斜面分解力：

$$\begin{aligned} M:&\quad Mg\sin\alpha - T = Ma,\\ m:&\quad T - mg\cos\alpha = ma. \end{aligned}$$

两式相加消去 T：

$$a = \frac{g\,(M\sin\alpha - m\cos\alpha)}{M+m}.$$

由于当 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 时 $\cos\alpha>0$，

$$a>0 \iff M\sin\alpha > m\cos\alpha \iff \tan\alpha > \frac{m}{M}.$$

所以若 $\tan\alpha > \frac{m}{M}$，由静止开始的系统会朝正方向加速：M 沿其斜面下滑，正如题目所求。

> ? **想一想** 我们怎样知道绳子一直保持拉紧，从而确定这些方程是正确的?

由第二条方程，$T = m(a+g\cos\alpha)$，当 $a>0$ 时这是正数，所以绳子拉紧与方程并无矛盾。此外，绳子也不可能松弛：假如松弛了，每个质点都会沿自己的斜面向下滑，两者同时远离滑轮，这就需要一条更长的绳子。

第 (ii) 部分

现在 $\tan\alpha = \frac{2m}{M}$，所以 $m = \frac{1}{2}M\tan\alpha$，而且 $\tan\alpha > \frac{m}{M}$，故由第 (i) 部分可知，运动方向仍然是 M 向下。代入 $m = \frac{1}{2}M\tan\alpha$ 并约去 M：

$$\begin{aligned} a &= \frac{g\,(M\sin\alpha - \frac{1}{2}M\tan\alpha\cos\alpha)}{M+\frac{1}{2}M\tan\alpha} = \frac{g\,(\sin\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha)}{1+\frac{1}{2}\tan\alpha} = \frac{\frac{1}{2}g\sin\alpha}{\frac{1}{2}(2+\tan\alpha)}\\ &= \frac{g\sin\alpha}{\tan\alpha+2}, \end{aligned}$$

其中用到 $\tan\alpha\cos\alpha = \sin\alpha$。这就是所求的加速度大小。

求极大值。比值 m/M 通过 $\tan\alpha = 2m/M$ 决定了 α，所以我们要求以下函数的极大值：

$$f(\alpha) = \frac{\sin\alpha}{\tan\alpha+2}, \qquad 0<\alpha<\tfrac{\pi}{2}.$$

利用商法则（quotient rule），并由 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\tan\alpha = \sec^2\alpha$，得

$$f'(\alpha) = \frac{\cos\alpha\,(\tan\alpha+2) - \sin\alpha\sec^2\alpha}{(\tan\alpha+2)^2} = \frac{\sin\alpha + 2\cos\alpha - \dfrac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}}{(\tan\alpha+2)^2}.$$

把分子乘以 $\cos^2\alpha > 0$，并利用 $1-\cos^2\alpha = \sin^2\alpha$：

$$\cos^2\alpha\,(\sin\alpha + 2\cos\alpha) - \sin\alpha = 2\cos^3\alpha - \sin\alpha\,(1-\cos^2\alpha) = 2\cos^3\alpha - \sin^3\alpha.$$

所以 $f'(\alpha)$ 的正负号与 $2\cos^3\alpha - \sin^3\alpha = \cos^3\alpha\,(2-\tan^3\alpha)$ 相同。当 $\tan\alpha$ 由 0 增至 ∞ 时，这个式子在 $\tan^3\alpha < 2$ 时为正，一旦 $\tan^3\alpha > 2$ 便为负。因此 f 先递增后递减，其极大值出现于唯一的驻点（stationary point）

$$\tan^3\alpha = 2.$$

（你也可以这样看出这是极大值：在整个区间上 $f > 0$，而在两端 $f \to 0$。）配合 $\tan\alpha = \frac{2m}{M}$，这即是说

$$\frac{8m^3}{M^3} = 2, \qquad \text{即} \qquad 4m^3 = M^3,$$

正如题目所求。

验算

- 第 (i) 部分的极限情况：当 $m = 0$ 时得 $a = g\sin\alpha$，即光滑斜面上只有一个质点的情形；而当 $\tan\alpha = m/M$ 时得 $a = 0$，即平衡点。
- 在最优情况下，$\tan\alpha = 2^{1/3} \approx 1.26$，所以 $\alpha \approx 51.6°$，而 $m/M = 4^{-1/3} \approx 0.63$。对 f 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上作网格搜索，所得的极大值位于同一个 α，其值为 $f \approx 0.240$，所以最大加速度约为 $0.240g$。
- 以随机的质量和角度代入第 (i) 部分的一般公式，每当 $\tan\alpha = 2m/M$ 时，结果都与第 (ii) 部分的公式吻合，而且两条运动方程给出相同的正张力。

常见错误

- 对 m 使用 $mg\sin\alpha$：它所在斜面的倾角是 $\frac{\pi}{2} - \alpha$，所以分量应是 $mg\cos\alpha$。
- 固定 m 而让 M 变化（或反过来）去求极大值，却没有留意 a 只取决于 α。把一切都用 α 表示，问题便成为单变量问题。

STEP 之外

像这样由约束（constraint）把物体连系起来的系统，正是拉格朗日力学（Lagrangian mechanics）的起点：你只需选取一个坐标（这里是沿绳子移动的距离 s），张力和法向反作用力等约束力便会自动消失。大学一年级的课程会把这个想法发展成一套有系统的方

法，适用于滑轮、摆以及许多其他情况。若想找一本在这个程度上清楚讲解牛顿力学的书，可以看 Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。