详细解答

STEP I 2009，第 1 题

纯数学 · 因数的计数

> **STEP I 2009，第 1 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/09-s1-q1

关键思路

$p^a q^b$（其中 p、q 为相异质数）的每一个因数（factor）都可写成 $p^i q^j$，其中 $0 \le i \le a$ 及 $0 \le j \le b$；而根据唯一分解定理（unique factorisation），不同的 (i, j) 会给出不同的因数。因此因数的数目是一个乘积 $(a+1)(b+1)$，而且无论有多少个质数，同样的结论都成立。计算真因数（proper factor）的数目只需再减去 2，于是两部分都变成把一个数写成乘积的问题。

解答

以 $d(N)$ 表示 N 的正因数的数目，包括 1 和 N 在内。若

$$N = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$$

其中 p_i 为相异质数且 $a_i \ge 1$，则 N 的正因数是 $p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}$，其中 $0 \le e_i \le a_i$；每个 e_i 有 $a_i + 1$ 种选择，而根据唯一分解定理，不同的选择给出不同的因数。因此

$$d(N) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_k + 1).$$

当 $N > 1$ 时，因数 1 和 N 并不相同，所以真因数的数目是 $d(N) - 2$。

第 (i) 部分

对于 $3^2 \times 5^3$，我们得到 $d = (2+1)(3+1) = 12$，所以共有 $12 - 2 = 10$ 个真因数，符合题目所求。

现在考虑 $3^m \times 5^n$。要令这个数是整数，而且至少有一个真因数，我们需要 $m, n \ge 0$（3 或 5 的负数次幂无法被另一个质数抵销）。它的因数是 $3^i 5^j$，其中 $0 \le i \le m$、$0 \le j \le n$，

所以 $d=(m+1)(n+1)$（这亦涵盖 $m=0$ 或 $n=0$ 的情况）。我们需要

$$(m+1)(n+1)=12,$$

也就是把 12 分解成两个正整数的有序乘积。这些分解是

$$1\times 12,\quad 2\times 6,\quad 3\times 4,\quad 4\times 3,\quad 6\times 2,\quad 12\times 1,$$

从而得出

$$(m,n)=(0,11),\ (1,5),\ (2,3),\ (3,2),\ (5,1),\ (11,0).$$

同样根据唯一分解定理，每一组都给出不同的整数。其中一组 $(2,3)$ 就是题目给出的数，所以这种形式而又有 10 个真因数的**其他**整数恰好有 **5** 个：5^{11}、3×5^5、$3^3\times 5^2$、$3^5\times 5$ 和 3^{11}。

第 (ii) 部分

我们需要 $d(N)=426+2=428$，而

$$428=2^2\times 107,$$

其中 107 是质数（它不能被 2、3、5 或 7 整除，而且 $11^2>107$）。

? **想一想** N 的质因数分解（prime factorisation）可能有哪些形式?

各个 a_i+1 都至少是 2，而它们的乘积是 428。由于 107 是质数，当中恰好有一个是 107 的倍数，而它只能是 107、214 或 428；其余各数的乘积则分别是 4、2 或 1。不计次序的话，a_i+1 这组数的可能情况是

$$\{428\},\qquad \{214,\ 2\},\qquad \{107,\ 4\},\qquad \{107,\ 2,\ 2\},$$

所以指数组成的多重集（multiset）是

$$\{427\},\qquad \{213,\ 1\},\qquad \{106,\ 3\},\qquad \{106,\ 1,\ 1\}.$$

? **想一想** 指数确定之后，应该把它们分配给哪些质数?

指数既定，要令 N 尽可能小，就应该使用最小的质数，并把最大的指数放在最小的质数上。使用最小的可用质数显然最好：把一个质数换成一个较小而未用过的质数，N 就会变小。另外，若 $p<q$，但 p 的指数是 a、q 的指数是 b，而 $a<b$，则把两个指数对调，相当于把 N 乘以

$$\frac{p^bq^a}{p^aq^b}=\left(\frac{p}{q}\right)^{b-a}<1,$$

所以对调之后 N 会变小。因此每种形式的最佳候选是

$$2^{427}, \qquad 2^{213}\times 3, \qquad 2^{106}\times 3^3, \qquad 2^{106}\times 3\times 5.$$

比较它们的大小：

- $2^{106}\times 3\times 5 = 2^{106}\times 15 < 2^{106}\times 27 = 2^{106}\times 3^3$；
- $2^{106}\times 27 < 2^{106}\times 2^5 = 2^{111}$，而这远小于 $2^{213}\times 3$ 和 2^{427}。

因此

$$N = 2^{106}\times 3\times 5.$$

验算一下：$d(N) = 107\times 2\times 2 = 428$，所以 N 有 426 个真因数。

验算

- 取一个较小的例子，直接列出 $3\times 5^5 = 9375$ 的因数：3^i5^j，其中 $i\in\{0,1\}$、$j\in\{0,\ldots,5\}$，共有 12 个因数，所以有 10 个真因数。
- 用电脑对所有满足 $(a+1)(b+1)(c+1)(d+1) = 428$ 的指数组合 $2^a3^b5^c7^d$ 作一次简短的搜索，可确认最小的是 $2^{106}\times 15 \approx 1.22\times 10^{33}$，其次是 $2^{106}\times 27$。

常见错误

- 在第 (i) 部分答 6：题目问的是*其他*整数，所以题目给出的那一个不计算在内。
- 遗漏 $m = 0$ 或 $n = 0$ 的情况（即 5^{11} 和 3^{11}），它们同样符合题目要求的形式。
- 以为第 (ii) 部分的答案必须用上尽可能多的质数：107 是质数，这就迫使其中一个指数非常大，真正可以选择的只有因数 4 如何拆分。

STEP 之外

函数 $d(N)$ 是一个*积性*（multiplicative）函数：只要 m 和 n 互质（coprime），就有 $d(mn) = d(m)d(n)$，而这正是本题所用的乘积公式。因数数目比每一个较小的数都多的数，就是拉马努金（Ramanujan）的*高度合成数*（highly composite numbers），而第 (ii) 部分对调指数的论证，正是他刻划这类数的第一步。想阅读有关唯一分解定理和算术函数（arithmetic functions）的内容，Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（一本初等数论经典入门书）是个好去处。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。