详细解答

STEP III 2008，第 9 题

力学 · 摩擦力与变力

STEP III 2008，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

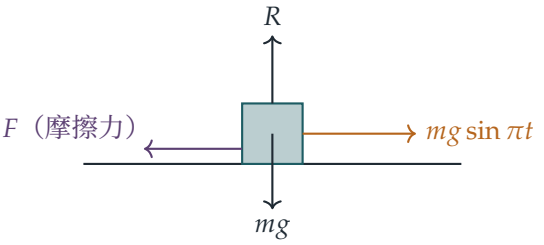
step.maths.org/questions/08-s3-q9

关键思路

摩擦力有两种状态。质点（particle）静止时，静摩擦力（static friction）恰好与外加的力相等，上限为 μmg，因此加速度为零。质点一旦滑动，摩擦力的大小固定为 μmg，方向与速度相反。所以加速度的图像由若干段平坦的零值线段和平移后的正弦曲线连接而成。“静止下来”的意思是：速度（即自运动开始起加速度图像下的面积）回到零。

解答

我们把物体看成粗糙水平面上的质点。法向反作用力（normal reaction）为 $R = mg$，所以静止时摩擦力的大小至多为 μmg，滑动时则恰好为 μmg。取 $\sin \pi t > 0$ 时外力的方向为正方向，并设 a 和 v 分别为加速度和速度。



开始运动

沿铅垂方向分解，得 $R = mg$。质点静止时，水平方向的平衡需要大小为 $mg|\sin \pi t|$ 的摩擦力，而只要 $mg|\sin \pi t| \leq \mu mg$，这是可以做到的。当外力首次超过极限摩擦力（limiting

friction）时，质点便首次开始运动，所以（当 $\mu < 1$ 时）

$$\sin \pi T_0 = \mu, \qquad \text{即} \qquad T_0 = \frac{1}{\pi} \arcsin \mu, \quad 0 \le T_0 < \tfrac{1}{2}.$$

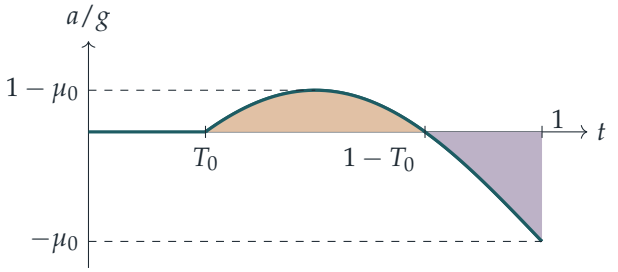
（若 $\mu \ge 1$，质点永远不会运动。）

第 (i) 部分

当 $0 \le t \le T_0$ 时质点静止，所以 $a = 0$。当 $t > T_0$ 时，质点沿正方向滑动，摩擦力 $\mu_0 mg$ 指向后方，由牛顿（Newton）第二定律得

$$a = g(\sin \pi t - \mu_0) \qquad (\text{只要} v > 0).$$

这个加速度在 $t = T_0$ 时由 0 开始，在 $t = \frac{1}{2}$ 时升至 $g(1 - \mu_0)$，在 $t = 1 - T_0$ 时回落至 0（由对称性 $\sin \pi(1 - t) = \sin \pi t$ 可知），此后一直为负，在 $t = 1$ 时达到 $-\mu_0 g$。



速度就是这个图像由 T_0 起计的面积：曲线在横轴之上时（琥珀色区域）速度增加，过了 $1 - T_0$ 之后（紫红色区域）速度减少。在两块面积互相抵销之前，速度一直为正，而抵销的一刻就是质点停下来的时刻。所以我们需要

$$v(1) = \int_{T_0}^{1} g(\sin \pi t - \mu_0)\, \mathrm{d}t = 0.$$

现在

$$\begin{aligned} \int_{T_0}^{1} (\sin \pi t - \mu_0)\, \mathrm{d}t &= \Big[-\frac{\cos \pi t}{\pi} \Big]_{T_0}^{1} - \mu_0 (1 - T_0) \\ &= \frac{1 + \cos \pi T_0}{\pi} - \mu_0 + \mu_0 T_0. \end{aligned}$$

令上式等于零，再乘以 π：

$$1 + \cos \pi T_0 - \mu_0 \pi + \mu_0 \pi T_0 = 0.$$

? **想一想** 用 μ_0 表示 $\cos \pi T_0$ 时，它应取哪个符号？

由于 $0 \le \pi T_0 < \frac{\pi}{2}$，余弦为正，所以 $\cos \pi T_0 = \sqrt{1-\sin^2 \pi T_0} = (1-\mu_0^2)^{1/2}$。另外 $\pi T_0 = \arcsin \mu_0$。把两者代入，得

$$1 + \left(1-\mu_0^2\right)^{\frac{1}{2}} - \mu_0 \pi + \mu_0 \arcsin \mu_0 = 0,$$

这正是所要证明的。（数值上 $\mu_0 \approx 0.7246$，$T_0 \approx 0.258$。）

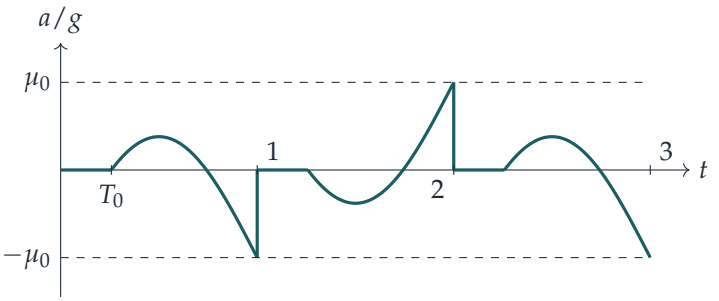
第 (ii) 部分

在 $t = 1$ 时，质点静止，外力为 $mg \sin \pi = 0$。当 $1 < t < 2$ 时，外力指向负方向，大小为 $mg|\sin \pi t|$。在 $|\sin \pi t| = \mu_0$ 之前，这个力小于 $\mu_0 mg$，而该等式首次成立是在 $t = 1 + T_0$（因为 $\sin \pi(1+T_0) = -\sin \pi T_0$）。所以当 $1 \le t \le 1 + T_0$ 时，质点保持静止，$a = 0$。

此后质点沿负方向滑动，摩擦力指向正方向，于是

$$a = g(\sin \pi t + \mu_0).$$

由于 $\sin \pi(t+1) = -\sin \pi t$，这恰好是第 (i) 部分中时刻 $t-1$ 的加速度的相反数。因此 $[1,2]$ 上的运动是 $[0,1]$ 上运动的镜像：速度是先前速度的相反数，所以质点在 $t = 2$ 时再次静止，并且往回走了相同的距离。这时质点静止而外力为零，与 $t = 0$ 时的情况完全相同，所以在 $[2,3]$ 上，$[0,1]$ 的运动会重演一次。



在 $t = 1$ 和 $t = 2$ 处的铅垂线段表示加速度的跳跃：在质点停下的一瞬间，动摩擦力（kinetic friction，大小为 $\mu_0 mg$）被静摩擦力取代，而静摩擦力只需平衡大小为零的外力。

*$\mu = \mu_0$ 时的运动。*质点一直静止至 $t = T_0$，然后向前滑动，在 $t = 1$ 时停下，等到 $t = 1 + T_0$，再向后滑动，在 $t = 2$ 时停在出发点，如此类推。它在同一段地面上来回往返，周期为 2，在两端各停留 T_0 的时间。（再积分一次，可得这段路的长度为 $g[\mu_0/\pi^2 - (1-T_0)(1-\sqrt{1-\mu_0^2})/(2\pi)] \approx 0.0367g$，不过题目并没有要求这个结果。）

*$\mu = 0$ 时的运动。*这时 $T_0 = 0$，而且在任何时刻都有 $a = g \sin \pi t$，所以

$$v = \frac{g}{\pi}(1 - \cos \pi t) \ge 0, \qquad x = \frac{g}{\pi}\left(t - \frac{\sin \pi t}{\pi}\right).$$

速度永不为负，并且只在 $t = 0, 2, 4, \ldots$ 时为零。所以质点永不回头：它一阵一阵地向前冲，在偶数时刻瞬间静止，每个长度为 2 的周期前进 $2g/\pi$，平均速率为 g/π。在粗糙的情况下，令质点在 $t = 1$ 停下来的正是摩擦力；没有摩擦力时，外力向后的那一半只会把质点减速至速度为零。

验算

用二分法（bisection）解第 (i) 部分的方程，得 $\mu_0 \approx 0.72461$，因而 $T_0 \approx 0.25798$。取 $g = 9.8$，对 $0 \le t \le 3$ 的运动作数值模拟，并在静摩擦力与动摩擦力之间切换，结果显示质点在 $t \approx 0.258$ 时起动，走了 0.3598 之后在 $t = 1.000$ 时停下，在 $t \approx 1.258$ 时开始往回走，并在 $t = 2.000$ 时停在出发点，与 $0.0367g$ 吻合。当 $\mu = 0$ 时，模拟结果与 $x = g(t - \sin \pi t/\pi)/\pi$ 一致。对方程作一个简单的合理性检查：在 $\mu_0 = 0$ 时左边为 $2 > 0$，在 $\mu_0 = 1$ 时左边为 $1 - \pi/2 < 0$，所以在 $(0, 1)$ 内有根。

常见错误

- 由 $t = 0$ 起就取 $a = g(\sin \pi t - \mu)$：在 T_0 之前质点静止，摩擦力是静摩擦力，所以 $a = 0$。
- 在第 (ii) 部分中，质点反向之后仍让摩擦力保持原来的方向。摩擦力总是与速度方向相反。
- 以为质点在 $t = 1 - T_0$ 时停下，但那时为零的是加速度，而不是速度。

STEP 之外

摩擦力在“黏住”与“滑动”之间切换，令运动方程变成分段（piecewise）的形式，加速度亦变得不连续。这就是门铰吱吱作响和小提琴弓拉琴弦背后的黏滑（stick–slip）现象，也是非光滑动力系统（non-smooth dynamical system）的一个入门例子。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）以合适的程度讨论了摩擦力模型和受迫运动。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。