详细解答

# STEP III 2008，第 8 题

纯数学 · 级数与递推关系

**STEP III 2008，第 8 题**

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/08-s3-q8

## 关键思路

系数满足线性递推关系（linear recurrence），意味着只要把级数乘以适当的多项式，几乎所有项都会互相抵消。这个多项式可以直接从递推关系读出来：$a_{r+1}+pa_r=0$ 提示我们用 $1+px$，而 $a_{r+2}+pa_{r+1}+qa_r=0$ 则提示我们用 $1+px+qx^2$。余下的只是一个很短的多项式，所以级数之和是一个有理函数（rational function）。对于有限项之和，同样的技巧会在末端留下几个额外的项。另一个做法是用部分分式（partial fractions）把级数拆成几个等比级数（geometric series），而等比级数的和我们是懂得求的。

## 解答

### 第 (i) 部分

这里级数由 $x$ 项开始，所以 $a_1=\frac{1}{3}$，$a_2=\frac{1}{6}$，$a_3=\frac{1}{12}$。每个系数都是前一个的一半，所以 $a_{r+1}-\frac{1}{2}a_r=0$，即

$$p=-\tfrac{1}{2}.$$

（这里没有常数项。递推关系只把 $a_1,a_2,a_3,\ldots$ 联系起来，对 $r=0$ 的情况并无任何说明。）解这个递推关系，得 $a_r=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{r-1}$。

**无穷项之和（sum to infinity）。** 乘以 $1-\frac{1}{2}x$：

$$\left(1-\tfrac{1}{2}x\right)S=a_1x+\sum_{r\geq 1}\left(a_{r+1}-\tfrac{1}{2}a_r\right)x^{r+1}=\tfrac{1}{3}x,$$

因为根据递推关系，每个括号都等于零。因此

$$S = \frac{\frac{1}{3}x}{1-\frac{1}{2}x} = \frac{2x}{3(2-x)}.$$

这是一个公比为 $\frac{1}{2}x$ 的等比级数，所以无穷项之和恰好在 $|x|<2$ 时存在。

**首 $n+1$ 项。** 这些就是 $x, x^2, \ldots, x^{n+1}$ 各项。设 $S_{n+1} = \sum_{r=1}^{n+1} a_r x^r$。重复同样的乘法，中间各项仍然全部抵消，但最高次的一项 $-\frac{1}{2}a_{n+1}x^{n+2}$ 却没有对应的项与它抵消：

$$\left(1-\tfrac{1}{2}x\right)S_{n+1} = \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{2}a_{n+1}x^{n+2} = \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1}x^{n+2} = \tfrac{1}{3}x\left(1-\left(\tfrac{x}{2}\right)^{n+1}\right).$$

所以，当 $x \neq 2$ 时，

$$S_{n+1} = \frac{2x}{3(2-x)}\left(1-\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}\right).$$

当 $x=2$ 时，每一项都等于 $\frac{2}{3}$，所以 $S_{n+1} = \frac{2}{3}(n+1)$。

**第 (ii) 部分**

现在 $a_0=2$，$a_1=8$，$a_2=18$，$a_3=37$。把 $r=0$ 和 $r=1$ 代入递推关系，得到两条方程：

$$18+8p+2q=0, \qquad 37+18p+8q=0.$$

由第一条方程得 $q=-9-4p$。代入第二条方程，得 $37+18p-72-32p=0$，所以 $p=-\frac{5}{2}$，从而 $q=1$。递推关系是

$$a_{r+2} - \tfrac{5}{2}a_{r+1} + a_r = 0.$$

**无穷项之和。** 乘以 $1+px+qx^2 = 1-\frac{5}{2}x+x^2$。对每个 $r \geq 0$，乘积中 $x^{r+2}$ 的系数是 $a_{r+2}-\frac{5}{2}a_{r+1}+a_r = 0$。只有 $x^0$ 和 $x^1$ 的系数留下来：

$$\left(1-\tfrac{5}{2}x+x^2\right)T = a_0 + \left(a_1 - \tfrac{5}{2}a_0\right)x = 2+3x.$$

把分子和分母同时加倍，并把 $2-5x+2x^2 = (1-2x)(2-x)$ 因式分解，得

$$T = \frac{4+6x}{(1-2x)(2-x)}.$$

**部分分式。** 设 $\dfrac{4+6x}{(1-2x)(2-x)} = \dfrac{A}{1-2x} + \dfrac{B}{2-x}$。用遮盖法（cover-up），在 $x=\frac{1}{2}$ 处得 $A = \dfrac{7}{3/2} = \frac{14}{3}$，在 $x=2$ 处得 $B = \dfrac{16}{-3} = -\frac{16}{3}$。所以

$$T = \frac{14}{3}\cdot\frac{1}{1-2x} - \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}x}.$$

把每一项展开成等比级数，得

$$a_r = \tfrac{14}{3}\,2^r - \tfrac{8}{3}\left(\tfrac{1}{2}\right)^r.$$

验算：$r = 0, 1, 2, 3$ 分别给出 2、$\frac{28}{3} - \frac{4}{3} = 8$、$\frac{56}{3} - \frac{2}{3} = 18$ 和 $\frac{112}{3} - \frac{1}{3} = 37$，与已知的值相符。

**想一想** 无穷项之和究竟对哪些 $x$ 才存在?

两个等比级数都必须收敛（converge），所以需要 $|2x| < 1$ 和 $|\frac{1}{2}x| < 1$。第一个条件较为严格，所以我们需要 $|x| < \frac{1}{2}$。

**首 $n+1$ 项。** 这些就是由 $x^0$ 到 $x^n$ 的各项。把每个等比级数求和至 $n+1$ 项，当 $x \neq \frac{1}{2}, 2$ 时，得

$$\sum_{r=0}^{n} a_r x^r = \frac{14}{3} \cdot \frac{1-(2x)^{n+1}}{1-2x} - \frac{16}{3} \cdot \frac{1-\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}}{2-x}.$$

（第二个分式就是 $\frac{8}{3} \cdot \frac{1-(x/2)^{n+1}}{1-x/2}$，只是分子和分母都乘以 2。）若 $x = \frac{1}{2}$ 或 $x = 2$，对应的等比级数之和就只是 $n+1$ 个 1 相加。

## 验算

- 在 $|x| < \frac{1}{2}$ 的情况下令 $n \to \infty$：幂 $(2x)^{n+1}$ 和 $(x/2)^{n+1}$ 趋向零，于是我们重新得到 $T$ 的部分分式形式。在第 (i) 部分，当 $|x| < 2$ 时情况相同。
- 取 $n = 0$，第 (i) 部分的公式给出 $\frac{2x}{3(2-x)} \cdot \frac{2-x}{2} = \frac{1}{3}x$。第 (ii) 部分的公式给出 $\frac{14}{3} - \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{2} = 2$。两者都是首项，正如所料。
- 数值上，在 $x = 0.3$ 处有 $T = \dfrac{5.8}{0.4 \times 1.7} \approx 8.5294$，而 $2 + 8x + 18x^2 + 37x^3 + \cdots$ 的部分和（partial sums）亦趋近这个值。

## 常见错误

- 在第 (i) 部分，把首项当作 $a_0 x^0$。级数由 $x^1$ 开始，所以首 $n+1$ 项一直去到 $x^{n+1}$。
- 把有限项之和乘以 $1 + px$ 时，忘记了末端剩下的项。正是这些项产生了 $(\frac{x}{2})^{n+1}$ 这个因子。
- 对 $T$ 写出 $|x| < 2$。决定收敛半径（radius of convergence）的，是较接近原点的根 $x = \frac{1}{2}$。

## STEP 之外

幂级数（power series）$\sum a_r x^r$ 是数列 $(a_r)$ 的*生成函数*（generating function）。常系数线性递推关系必定给出有理的生成函数，而这个函数的极点（poles）既决定 $a_r$ 的闭合形式（closed form），也决定收敛半径。生成函数是组合数学（combinatorics）和概率论中的标准工具，而幂级数的收敛半径则会在大学一年级的分析课程中严谨地建立起来。Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本分析学入门教科书）对收敛这方面有很好的讲解。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。