详细解答

STEP III 2008，第 7 题

纯数学 · 复数与几何

STEP III 2008，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/08-s3-q7

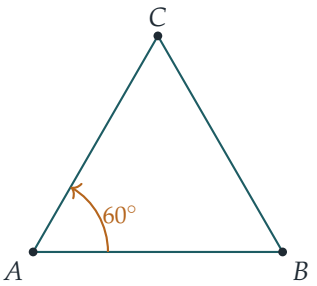
关键思路

在阿根图(Argand diagram)上,乘以 $e^{i\pi/3}$ 相当于逆时针旋转 60°。等边三角形(equilateral triangle)正好就是把一条边绕着一个顶点旋转 60° 而成,所以开首的关系式把“等边”这个条件化成了 a、b、c 的线性方程。之后两部分都只是按部就班的整理功夫：把每个新的点用原有的点表示出来，再验证我们想要的条件——若要证明是平行四边形（parallelogram），就验证 $p+r=q+s$；若要证明是等边三角形，就验证开首的关系式本身。

解答

开首的关系式

设 $\omega = e^{i\pi/3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$。由于 ABC 是等边三角形，AC 与 AB 等长，并与它成 60° 角。因为三角形的顶点是按逆时针方向排列的，所以由 $\overrightarrow{AB}$ 转到 $\overrightarrow{AC}$ 是逆时针方向。因此 $\overrightarrow{AC}$ 就是 $\overrightarrow{AB}$ 旋转 $+60°$ 所得：



$$c-a=\omega(b-a)=\tfrac{1}{2}(b-a)+\tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}(b-a),$$
$$2c=2a+(b-a)+\mathrm{i}\sqrt{3}(b-a)=(a+b)+\mathrm{i}\sqrt{3}(b-a),$$

这就是所要求的结果。

若三角形的顶点按顺时针方向排列，$\overrightarrow{AC}$ 就是 $\overrightarrow{AB}$ 旋转 -60° 所得，所以 $c-a=\bar{\omega}(b-a)$，其中 $\bar{\omega}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$。同样的代数运算给出

$$2c=(a+b)-\mathrm{i}\sqrt{3}(b-a).$$

反过来说，任何满足其中一条关系式的 c 都会令 ABC 成为等边三角形，因为每条关系式都等价于 $c-a=\omega^{\pm1}(b-a)$。所以要证明一个三角形是等边三角形，只需验证其中一条关系式便可。

第 (i) 部分

四个顶点由我们自行选择，而每一个都可以放在所属边的任何一侧。利用开首的结果，并让这些顶点担当 c 的角色，取

$$\begin{aligned}
2p&=(d+e)+\mathrm{i}\sqrt{3}(e-d) && (D,E,P\text{ 逆时针}),\\
2q&=(e+f)-\mathrm{i}\sqrt{3}(f-e) && (E,F,Q\text{ 顺时针}),\\
2r&=(f+g)+\mathrm{i}\sqrt{3}(g-f) && (F,G,R\text{ 逆时针}),\\
2s&=(g+d)-\mathrm{i}\sqrt{3}(d-g) && (G,D,S\text{ 顺时针}).
\end{aligned}$$

根据开首的结果，PDE、QEF、RFG、SGD 于是全都是等边三角形。

> **想一想** 为甚么要让方向交替变换，而不是把每个三角形都放在所属边的同一侧？

不妨试试看。$PQRS$ 是平行四边形，当且仅当 $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR}$，即 $q-p=r-s$，亦即 $p+r=q+s$。（这表示对角线 PR 与 QS 有相同的中点。）按上面的选择，

$$2(p+r)=(d+e+f+g)+\mathrm{i}\sqrt{3}\,(e-d+g-f),$$
$$2(q+s)=(d+e+f+g)-\mathrm{i}\sqrt{3}\,(f-e+d-g)=(d+e+f+g)+\mathrm{i}\sqrt{3}\,(e-d+g-f).$$

两者相等，所以 $p+r=q+s$，$PQRS$ 是平行四边形。假如我们全部都用“+”号，虚部就会是 $\mathrm{i}\sqrt{3}(e-d+g-f)$ 和 $\mathrm{i}\sqrt{3}(f-e+d-g)$。这两者只在 $d+f=e+g$ 时才相等，也就是只在 $DEFG$ 本身已经是平行四边形时才相等。正是正负号交替，才令含 $\sqrt{3}$ 的项对任何四边形都能吻合。

（对某些四边形来说，这四点可能刚好共线，得出一个退化的平行四边形。在这种情况下，条件 $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR}$ 仍然成立。）

第 (ii) 部分

若 LMN 的顶点按顺时针方向排列, 可把整个图形对实轴作反射(即取共轭复数(complex conjugate))。反射保持等边三角形和形心 (centroid) 不变，也保持边上的三角形是否向外作这一性质，所以只需处理 LMN 按逆时针方向排列的情况。

这时 N 位于有向边 $L \to M$ 的左方，而 LM 上向外作的三角形 LMX 的顶点 X 则在右方，所以 L, M, X 是按顺时针方向排列的:

$$2x = (l+m) - \mathrm{i}\sqrt{3}(m-l).$$

LMX 的形心是

$$u = \tfrac{1}{3}(l+m+x) = \tfrac{1}{3}(l+m) + \tfrac{1}{6}(l+m) - \tfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{6}(m-l) = \frac{l+m}{2} + \frac{\mathrm{i}(l-m)}{2\sqrt{3}},$$

其中用到 $\frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$。作轮换 $l \to m \to n \to l$ (这样会保持逆时针的次序)，得

$$v = \frac{m+n}{2} + \frac{\mathrm{i}(m-n)}{2\sqrt{3}}, \qquad w = \frac{n+l}{2} + \frac{\mathrm{i}(n-l)}{2\sqrt{3}}.$$

我们现在证明 U, V, W 满足逆时针的关系式 $2w = (u+v) + \mathrm{i}\sqrt{3}(v-u)$。首先,

$$\begin{aligned} u+v &= \tfrac{1}{2}l + m + \tfrac{1}{2}n + \frac{\mathrm{i}(l-n)}{2\sqrt{3}}, \\ v-u &= \tfrac{1}{2}(n-l) + \frac{\mathrm{i}(2m-l-n)}{2\sqrt{3}}, \\ \mathrm{i}\sqrt{3}(v-u) &= \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}(n-l) - \tfrac{1}{2}(2m-l-n). \end{aligned}$$

? **想一想** m 是怎样消失的?

把第一行和第三行相加。实部给出 $\frac{1}{2}l + m + \frac{1}{2}n - m + \frac{1}{2}l + \frac{1}{2}n = l + n$，所以 m 在实部中互相抵消，而它从来没有在虚部中出现过。虚部合并成

$$(n-l)\Big(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\Big)\mathrm{i} = (n-l)\,\frac{3-1}{2\sqrt{3}}\,\mathrm{i} = \frac{\mathrm{i}(n-l)}{\sqrt{3}}.$$

因此

$$(u+v) + \mathrm{i}\sqrt{3}(v-u) = (n+l) + \frac{\mathrm{i}(n-l)}{\sqrt{3}} = 2w.$$

根据开首的结果 (及其逆命题)，UVW 是一个顶点按逆时针方向排列的等边三角形。这就是拿破仑定理 (Napoleon's theorem)。

验算

- 开首的关系式：$a = 0$，$b = 2$ 给出 $c = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$，顶点在实轴上方，与逆时针排列的三角形应有的情况相符。
- 第 (ii) 部分，取 $l = 0$，$m = 6$，$n = 6\mathrm{i}$：由公式得 $u = 3 - \mathrm{i}\sqrt{3}$，$v = (3 + \sqrt{3})(1 + \mathrm{i})$ 和 $w = -\sqrt{3} + 3\mathrm{i}$。于是 UVW 三条边的长度平方都是 $24 + 12\sqrt{3}$。
- 我们用 10^4 个随机构形，以数值方法检验了开首的关系式、平行四边形条件和拿破仑定理。我们亦确认了，在第 (i) 部分若每条边都用同一方向，一般而言并不成立。

常见错误

- 在第 (ii) 部分弄错向外的方向。对于按逆时针方向排列的 LMN，LM 上向外的顶点相对于 L, M 是顺时针方向的。用错了正负号，得到的就会是内拿破仑三角形。（它同样是等边三角形，但并不是题目所问的。）
- 在第 (i) 部分，试图令四个三角形全部指向同一方。这只在 $DEFG$ 本身是平行四边形时才行得通。
- 用 $p + q = r + s$ 来检验平行四边形。应该是相对的顶点配成一对：条件是 $p + r = q + s$。

STEP 之外

背后的想法是：映射 $z \mapsto \alpha z + \beta$ 正好就是平面上的旋转、放大和平移，所以几何条件会变成 $\mathbb{C}$ 上的线性方程。开首的关系式有一个简洁的改写方式：ABC 是等边三角形，当且仅当 $a + \omega^2 b + \omega^4 c = 0$ 或 $a + \omega^4 b + \omega^2 c = 0$，而拿破仑定理只需几行代数运算便随之而得。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《复分析：可视化方法》）把复数乘法的这种几何观点发挥得淋漓尽致。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。