详细解答

STEP III 2008，第 6 题

纯数学 · 一阶微分方程

STEP III 2008，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/08-s3-q6

关键思路

每条方程都直接以 x 和斜率 p 表示 y，但并未解出 p，所以不能直接积分。对 x 求导可以消去 y（因为 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = p$），余下一条关于 x、p 和 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$ 的关系式。把这条关系式上下倒转，便得到一条以 x 为 p 的函数的线性一阶微分方程（linear first-order differential equation），可用积分因子（integrating factor）求解。然后把 $x(p)$ 代回原方程，便可求得 y。

解答

第 (i) 部分

把 $y = p^2 + 2xp$ 对 x 求导，对 p^2 用链式法则（chain rule），对 $2xp$ 用积法则（product rule），并以 p 取代 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$：

$$p = 2p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + 2p + 2x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \quad \Longrightarrow \quad -p = (2p + 2x)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}.$$

? **想一想** 我们可以把 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$ 倒转而得出 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}p$ 吗?

我们需要 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x \neq 0$。上面的方程显示，凡是 $p \neq 0$ 之处，$\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$ 和 $2p + 2x$ 都不等于零。（反正我们要除以 p，所以整个过程都需要 $p \neq 0$。）因此可以写成

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} = -\frac{2p + 2x}{p} = -2 - \frac{2x}{p},$$

正是题目所求。

整理后，这是一条对 x 为线性的方程：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} + \frac{2}{p}\,x = -2.$$

积分因子是 $\mathrm{e}^{\int 2/p\,\mathrm{d}p} = p^2$，全式乘以它，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}(p^2x) = -2p^2 \quad\Longrightarrow\quad p^2x = -\tfrac{2}{3}p^3 + A \quad\Longrightarrow\quad x = -\tfrac{2}{3}p + Ap^{-2},$$

其中 A 为任意常数。这就是题目给出的结果。

现在利用当 $x = 2$ 时 $p = -3$：

$$2 = -\tfrac{2}{3}(-3) + \frac{A}{9} = 2 + \frac{A}{9},$$

所以 $A = 0$，而 $x = -\frac{2}{3}p$，即 $p = -\frac{3}{2}x$。代入原方程，

$$y = p^2 + 2xp = \tfrac{9}{4}x^2 + 2x\left(-\tfrac{3}{2}x\right) = \tfrac{9}{4}x^2 - 3x^2,$$

所以

$$y = -\tfrac{3}{4}x^2.$$

验算一下：$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = -\frac{3}{2}x$，确实就是 p，而且在 $x = 2$ 时等于 -3。

第 (ii) 部分

这里出现了 $\ln p$, 所以 $p > 0$。把 $y = 2xp + p\ln p$ 对 x 求导, 并利用 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}(p\ln p) = \ln p + 1$：

$$p = 2p + 2x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + (\ln p + 1)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \quad\Longrightarrow\quad -p = (2x + \ln p + 1)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}.$$

与之前一样，$p \neq 0$ 令 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x \neq 0$，所以

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} = -\frac{2x + \ln p + 1}{p} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} + \frac{2}{p}\,x = -\frac{\ln p + 1}{p}.$$

积分因子同样是 p^2：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}(p^2x) = -p\ln p - p.$$

用分部积分法（integration by parts），取 $u = \ln p$，$\mathrm{d}v = p\,\mathrm{d}p$，

$$\int p\ln p\,\mathrm{d}p = \tfrac{1}{2}p^2\ln p - \int \tfrac{1}{2}p\,\mathrm{d}p = \tfrac{1}{2}p^2\ln p - \tfrac{1}{4}p^2,$$

所以

$$\begin{aligned} p^2x &= -\tfrac{1}{2}p^2\ln p + \tfrac{1}{4}p^2 - \tfrac{1}{2}p^2 + B \\ &= -\tfrac{1}{2}p^2\ln p - \tfrac{1}{4}p^2 + B, \end{aligned}$$

而

$$x = -\tfrac{1}{2}\ln p - \tfrac{1}{4} + Bp^{-2}.$$

利用当 $x = -\frac{1}{4}$ 时 $p = 1$：$-\frac{1}{4} = 0 - \frac{1}{4} + B$，所以 $B = 0$，而

$$x = -\tfrac{1}{2}\ln p - \tfrac{1}{4},$$

这正是题目要求我们证明的结果。

要求出 y，留意上式即 $\ln p = -2x - \frac{1}{2}$。把它代入原方程，比起把每一个 p 都代换掉要快：

$$y = 2xp + p\left(-2x - \tfrac{1}{2}\right) = -\tfrac{1}{2}p,$$

而 $p = \mathrm{e}^{-2x-1/2}$，所以

$$y = -\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x-\frac{1}{2}}.$$

验算：$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-2x-\frac{1}{2}} = p$，理应如此；而在 $x = -\frac{1}{4}$ 时，其值为 $\mathrm{e}^0 = 1$。

验算

在每一部分，把最后求得的 y 求导，确认导数确实就是你所用的 p：$y = -\frac{3}{4}x^2$ 给出 $p = -\frac{3}{2}x$，而 $p^2 + 2xp = \frac{9}{4}x^2 - 3x^2 = y$。至于第 (ii) 部分，在 $x = 0$ 时，$p = \mathrm{e}^{-1/2} \approx 0.6065$，而 $2xp + p\ln p = 0.6065 \times (-0.5) \approx -0.3033 = y(0)$。数值验算亦确认了，对随机选取的 A 和 B 值，一般的参数曲线 $(x(p), y(p))$ 的斜率 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 都等于 p。

常见错误

- 忘记左边的 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 就是 p，因而看不出相消之后余下 $-p$。
- 未用初始条件（initial condition）便把积分常数丢掉。这里的常数碰巧等于零，但你要把它求出来之后才知道。
- 在第 (ii) 部分，把 $p\ln p$ 对 x 求导时只写成 $\ln p$，遗漏了因子 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$ 和额外的 $+1$。

STEP 之外

形如 $y = xf(p) + g(p)$ 的方程称为达朗贝尔（d'Alembert）方程，又称拉格朗日（Lagrange）方程；其特殊情况 $y = xp + g(p)$ 就是克莱罗（Clairaut）方程。把 p 当作自变量（independent variable）的技巧对这些方程全部适用。它们还可能有奇异解（singular solutions），出现在我们曾除以 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$ 的地方，是通解（general solution）族的包络线（envelope）。Boyce 与 DiPrima 所著的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程）涵盖一阶方程及其解法。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。