详细解答

STEP III 2008，第 5 题

纯数学 · 递推关系

STEP III 2008，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/08-s3-q5

关键思路

$\mathrm{T}_n^2 - \mathrm{T}_{n-1}\mathrm{T}_{n+1}$ 这个量是递推关系（recurrence）的一个不变量（invariant）：当 n 增加一时，前后两项之差会互相抵销，因为递推关系容许我们把 $\mathrm{T}_{n+1} + \mathrm{T}_{n-1}$ 换成 $2x\mathrm{T}_n$。当不变量为零时，相邻两项之比全部相等，所以数列是等比数列（geometric sequence）。再把等比数列代入递推关系，便可确定公比（common ratio）是某个二次方程（quadratic）的根。

解答

以下 x 始终固定，并把 $\mathrm{T}_n(x)$ 记作 T_n，把 $\mathrm{f}(x)$ 记作 f。递推关系 $(*)$ 即是

$$\mathrm{T}_{n+1} + \mathrm{T}_{n-1} = 2x\,\mathrm{T}_n \qquad (n \geq 1).$$

不变量

对 $n \geq 1$，设 $D_n = \mathrm{T}_n^2 - \mathrm{T}_{n-1}\mathrm{T}_{n+1}$。我们用数学归纳法（induction）证明对所有 $n \geq 1$ 都有 $D_n = f$。

基本情况。$D_1 = \mathrm{T}_1^2 - \mathrm{T}_0\mathrm{T}_2$，按定义这就是 f。

归纳步骤。假设对某个 $k \geq 1$ 有 $D_k = f$。则

$$\begin{aligned} D_{k+1} - D_k &= \mathrm{T}_{k+1}^2 - \mathrm{T}_k\mathrm{T}_{k+2} - \mathrm{T}_k^2 + \mathrm{T}_{k-1}\mathrm{T}_{k+1} \\ &= \mathrm{T}_{k+1}(\mathrm{T}_{k+1} + \mathrm{T}_{k-1}) - \mathrm{T}_k(\mathrm{T}_{k+2} + \mathrm{T}_k) \\ &= \mathrm{T}_{k+1} \cdot 2x\mathrm{T}_k - \mathrm{T}_k \cdot 2x\mathrm{T}_{k+1} \\ &= 0, \end{aligned}$$

其中第三行对第一个括号用了 $(*)$ 取 $n=k$，对第二个括号则取 $n=k+1$（两者皆可，因为 $k\geq 1$）。因此 $D_{k+1}=D_k=f$，由归纳法可知

$$\mathrm{T}_n^2-\mathrm{T}_{n-1}\mathrm{T}_{n+1}=f\quad \text{对所有}n\geq 1,$$

这正是所要证明的。

$f\equiv 0$ 的情形

首先看看 $f=0$ 对 $r=\mathrm{T}_1/\mathrm{T}_0$ 有甚么含意。由 $(*)$ 取 $n=1$，得 $\mathrm{T}_2=2x\mathrm{T}_1-\mathrm{T}_0$，所以

$$f=\mathrm{T}_1^2-\mathrm{T}_0(2x\mathrm{T}_1-\mathrm{T}_0)=\mathrm{T}_0^2(r^2-2xr+1),$$

这里用了 $\mathrm{T}_1=r\mathrm{T}_0$。于是，由于 $\mathrm{T}_0\neq 0$，

$$f=0\iff r^2=2xr-1. \tag{†}$$

> **想一想** 不变量告诉我们 $\mathrm{T}_n^2=\mathrm{T}_{n-1}\mathrm{T}_{n+1}$，所以各个比值相等。为甚么不直接相除?

要除以 T_{n-1}，就必须先确定它不是零，这需要额外的论证。较简洁的做法是从“比值相等”这个想法猜出答案，然后利用 (†)，直接以递推关系本身来证明。

断言。对所有 $n\geq 0$，$\mathrm{T}_n=\mathrm{T}_0\,r^n$。

证明。我们使用强归纳法（strong induction），每次用上相邻的两个情况。断言在 $n=0$ 时显然成立；在 $n=1$ 时亦成立，因为按 r 的定义有 $\mathrm{T}_1=r\mathrm{T}_0$。假设断言对 $n=k-1$ 和 $n=k$ 成立，其中 $k\geq 1$。则由 $(*)$，

$$\begin{aligned}\mathrm{T}_{k+1}&=2x\mathrm{T}_k-\mathrm{T}_{k-1}=2x\mathrm{T}_0r^k-\mathrm{T}_0r^{k-1}\\&=\mathrm{T}_0r^{k-1}(2xr-1)=\mathrm{T}_0r^{k-1}\cdot r^2=\mathrm{T}_0r^{k+1},\end{aligned}$$

其中第四步用了 (†)。所以断言对 $n=k+1$ 成立，由归纳法可知它对所有 $n\geq 0$ 成立：

$$\boxed{\mathrm{T}_n(x)=\mathrm{T}_0(x)\,(\mathrm{r}(x))^n}$$

$\mathrm{r}(x)$ 的可能形式

由 (†)，r 满足 $r^2-2xr+1=0$，所以由二次公式（quadratic formula）得

$$\mathrm{r}(x)=x+\sqrt{x^2-1}\qquad 或\qquad \mathrm{r}(x)=x-\sqrt{x^2-1}.$$

反过来，无论取哪一个都满足 (†)，所以 $f\equiv 0$，而数列 T_0r^n 确实符合 $(*)$。两根之积为 1，所以它们互为倒数。当 $|x|<1$ 时两根是复数，即 $x\pm\mathrm{i}\sqrt{1-x^2}$；设 $x=\cos\theta$，它们便成为 $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\theta}$，而 $\mathrm{T}_n=\mathrm{T}_0\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}n\theta}$。

验算

- 切比雪夫多项式（Chebyshev polynomials）$\mathrm{T}_0 = 1$、$\mathrm{T}_1 = x$、$\mathrm{T}_2 = 2x^2 - 1$ 给出 $f = x^2 - (2x^2 - 1) = 1 - x^2$，而事实上对每个 n 都有 $\cos^2 n\theta - \cos(n-1)\theta\cos(n+1)\theta = \sin^2\theta$。取 $x = \frac{3}{7}$，D_n 的首十四个值全部等于 $\frac{40}{49}$。
- 取 $r = 2$, 则 $x = \frac{1}{2}(2 + \frac{1}{2}) = \frac{5}{4}$, 并取 $\mathrm{T}_0 = 1$、$\mathrm{T}_1 = 2$。由递推关系得 $\mathrm{T}_2 = \frac{5}{2}\cdot 2 - 1 = 4$ 及 $\mathrm{T}_3 = \frac{5}{2}\cdot 4 - 2 = 8$：正如所料，都是 2 的幂。此外，$x - \sqrt{x^2-1} = \frac{5}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$ 是另一个根。

常见错误

- 把 $(*)$ 用于 $n = 0$：递推关系由 $n = 1$ 开始，所以基本情况必须是 D_1，而不是 D_0（后者根本没有定义）。
- 把 $\mathrm{T}_n^2 = \mathrm{T}_{n-1}\mathrm{T}_{n+1}$ 除以 T_{n-1}，却没有检查它是否非零。

STEP 之外

常系数线性递推关系的解具有 $\alpha r_1^n + \beta r_2^n$ 的形式，其中 r_1, r_2 是其特征方程（characteristic equation）的根，在这里特征方程是 $r^2 - 2xr + 1 = 0$。条件 $f = 0$ 所挑出的，恰好是只剩下一个等比项的情况；一般而言，f 是 $\alpha\beta$ 的倍数。不变量 D_n 可说是二阶微分方程中朗斯基行列式（Wronskian）的离散版本，而对于 $y'' + q(x)y = 0$，朗斯基行列式是常数。Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations* 详细阐述了朗斯基行列式，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 则有更多 STEP 风格的递推关系题目。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。