详细解答

STEP III 2008，第 4 题

纯数学 · 反双曲函数不等式

STEP III 2008，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/08-s3-q4

关键思路

设 $x = \cosh y$。半角公式（half-angle formula）把 $\tanh(y/2)$ 化为 x 的代数函数，于是一个关于 tanh 的显浅不等式（inequality），就变成一个关于 arcosh 的不显浅不等式。之后，题目其实是在运转一部小机器：把不等式由 1 积分至 x，整理一下，便得到一个更强的不等式。把这部机器运转两次，先得出 (ii)，再得出 (iii)。

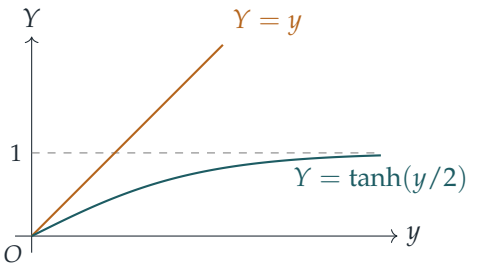
解答

以下一律记 $A(x) = \operatorname{arcosh} x$ 及 $S(x) = \sqrt{x^2-1}$，其中 $x \geq 1$。我们会用到以下两个导数（derivative）：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{arcosh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x^2-1} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \qquad (x > 1).$$

第 (i) 部分

曲线 $Y = \tanh(y/2)$ 通过原点，在原点的斜率（gradient）为 $\frac{1}{2}$，在 $y > 0$ 时是凹（concave）的，而且永远达不到 1；而直线 $Y = y$ 的斜率为 1：



对所有 $y>0$，直线都在曲线之上。要严格说明这一点，设 $g(t)=t-\tanh t$。则 $g(0)=0$，而且

$$g'(t)=1-\operatorname{sech}^2 t=\tanh^2 t>0 \quad \text{对于} t>0,$$

所以 g 严格递增（strictly increasing），而当 $t>0$ 时 $\tanh t<t$。取 $t=y/2$，得

$$\tanh(y/2)<\tfrac{1}{2}y<y \qquad (y>0).$$

现在设 $x>1$，并令 $y=\operatorname{arcosh} x$，于是 $y>0$、$\cosh y=x$ 及 $\sinh y=+\sqrt{x^2-1}$（因为 $y>0$，所以取正值）。利用 $\sinh y=2\sinh\frac{y}{2}\cosh\frac{y}{2}$ 及 $1+\cosh y=2\cosh^2\frac{y}{2}$，

$$\tanh\frac{y}{2}=\frac{\sinh y}{1+\cosh y}=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}=\frac{x^2-1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

因此 $y>\tanh(y/2)$ 变成

$$\operatorname{arcosh} x>\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad (x>1),$$

这就是 $(*)$。

第 (ii) 部分

固定 $x>1$，以 t 为变量，把 $(*)$ 在 $[1,x]$ 上积分。

> **想一想** $(*)$ 的右边，分母含有 $\sqrt{t^2-1}$。由 $t=1$ 开始积分是否稳妥？积分之后，不等式是否仍然是严格的？

两个问题的答案都是肯定的。当 $t>1$ 时，$\dfrac{t-1}{\sqrt{t^2-1}}=\sqrt{\dfrac{t-1}{t+1}}$，而当 $t\to 1$ 时它趋向 0，所以两边在 $[1,x]$ 上都是连续（continuous）的。两者之差是连续的，并且在 $(1,x]$ 上严格为正，所以它在 $[1,x]$ 上的积分严格为正。

左边用分部积分法（integration by parts），取 $u=\operatorname{arcosh} t$：

$$\int_1^x \operatorname{arcosh} t\,\mathrm{d}t=\Big[t\operatorname{arcosh} t\Big]_1^x-\int_1^x\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t=x\,A(x)-S(x),$$

因为 $\operatorname{arcosh} 1=0$ 及 $\sqrt{1^2-1}=0$。

右边可拆成两个标准积分：

$$\int_1^x\frac{t-1}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t=\int_1^x\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t-\int_1^x\frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t=S(x)-A(x).$$

因此

$$x\,A(x)-S(x)>S(x)-A(x) \quad\Longrightarrow\quad (x+1)A(x)>2S(x).$$

两边除以 $x+1>0$，并如第 (i) 部分般化简，

$$\operatorname{arcosh} x > \frac{2\sqrt{x^2-1}}{x+1} = 2\,\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad (x>1),$$

正是所求。这个下界刚好是 $(*)$ 中下界的两倍。

第 (iii) 部分

第 (ii) 部分说明，当 $t>1$ 时 $\operatorname{arcosh} t > 2\cdot\dfrac{t-1}{\sqrt{t^2-1}}$：右边与 $(*)$ 的右边相同，只是乘大了一倍。所以我们把同一部机器再运转一次。在 $[1,x]$ 上积分（理据与之前相同），并利用已求得的两个积分，

$$x\,A(x) - S(x) > 2\big(S(x)-A(x)\big) \quad\Longrightarrow\quad (x+2)A(x) > 3S(x).$$

由于 $x+2>0$，

$$\operatorname{arcosh} x > 3\,\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+2} \qquad (x>1),$$

这就是所求的结果。

> **想一想** 为甚么到此为止？可以再积分一次吗？

这部机器要求右边是 $\dfrac{t-1}{\sqrt{t^2-1}}$ 的倍数，因为我们知道它的积分。新的下界 $3\sqrt{t^2-1}/(t+2)$ 并非这个形式，所以这个技巧到此便用尽了。

作为独立的验证（即题目所谓“或用其他方法”的途径），设 $f(x)=A(x)-3S(x)/(x+2)$。则 $f(1)=0$，而根据商法则（quotient rule），

$$f'(x) = \frac{(x+2)^2 - 3x(x+2) + 3(x^2-1)}{(x+2)^2\sqrt{x^2-1}} = \frac{(x-1)^2}{(x+2)^2\sqrt{x^2-1}} > 0 \quad (x>1),$$

所以 f 严格递增，而当 $x>1$ 时 $f(x)>0$，与之前的结果一致。

验算

在 $x=2$：$\operatorname{arcosh} 2 = \ln(2+\sqrt{3}) \approx 1.3170$，而三个下界分别是 $1/\sqrt{3}\approx 0.577$、$2/\sqrt{3}\approx 1.155$ 及 $3\sqrt{3}/4 \approx 1.299$。每个下界都比前一个好，而且全部低于 1.3170。在 $x=1$ 附近，这些下界变得非常精确：在 $x=1.001$，$\operatorname{arcosh} x \approx 0.04471763$，(ii) 的下界只差约 7×10^{-6}，而 (iii) 的下界更只差约 10^{-9}，因为每个下界与 $\operatorname{arcosh} x$ 吻合至 $x-1$ 的更高阶。我们亦以数值方法检验了那两个积分（在 $x=1.5, 2, 5$ 用中点求积法（midpoint quadrature）），并在 10 000 个随机选取的 $x>1$ 检验了全部三个不等式，均没有发现任何出入。

常见错误

- 取 $\sinh(\operatorname{arcosh} x) = \pm\sqrt{x^2-1}$ 而没有确定正负号。因为 $\operatorname{arcosh} x > 0$，所以应取正根。
- 由 0 而不是由 1 开始积分：arcosh 只在 $x \geq 1$ 时有定义，而正是下限 1 令边界项（boundary terms）消失。
- 忘记说明为何积分后的不等式仍然是严格的。

STEP 之外

下界愈来愈好，是因为每积分一次，误差在 $x = 1$ 处消失的阶数便高一阶；这是一系列愈来愈精确的有理型近似的开端，它们是帕德逼近（Padé approximants）的近亲。全题贯彻使用的原理（若 $f(a) = 0$ 且 $f' > 0$，或其积分形式成立，则 $f > 0$）其实是中值定理（mean value theorem）的化身，也是大量分析学结果的基础。Abbott 的 *Understanding Analysis* 对中值定理和积分有严谨的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。