详细解答

STEP III 2008，第 3 题

纯数学 · 椭圆的切线与焦点

STEP III 2008，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

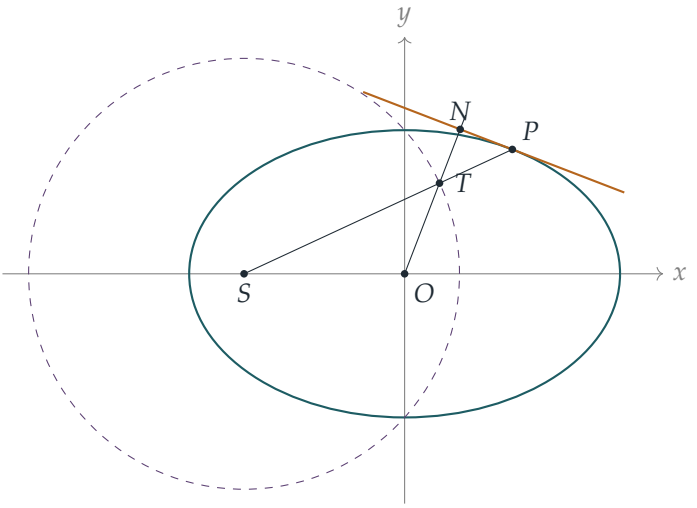
step.maths.org/questions/08-s3-q3

关键思路

整道题只涉及两条直线，所以要做的就是把它们的方程干净利落地写出来，然后求交点。直线 ON 垂直于切线（tangent），所以它的方向就是切线的法向量（normal vector），可以直接从切线方程读出。由 S 出发把 SP 参数化（parametrise），求交点便只需一行计算；而求得的参数原来正是处理圆时所需要的：它告诉我们点 T 位于 SP 上几分之几的位置。

解答

全题中 $0 < e < 1$：我们有 $e^2 = 1 - b^2/a^2$，由于 $a > b > 0$，此值严格介乎 0 与 1 之间。我们亦假设 $\sin\theta \neq 0$。若 $\sin\theta = 0$，则 $P = (\pm a, 0)$，切线为 $x = \pm a$，$N = P$，而 ON 和 SP 都是 x 轴，所以 T 没有定义。



（图中取 $a = 3$，$b = 2$，$\theta = 60°$。椭圆（ellipse）为蓝绿色，在 P 的切线为琥珀色，虚线圆的圆心为 S，半径为 a。）

T 的 y 坐标

对 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ 作隐函数微分（implicit differentiation），或直接引用标准结果，可知在 (x_1, y_1) 的切线为 $xx_1/a^2 + yy_1/b^2 = 1$。在 P 处，这就是

$$\frac{x\cos\theta}{a} + \frac{y\sin\theta}{b} = 1.$$

直线 $px + qy = 1$ 的法向量为 (p, q)，所以切线的法向量为 $(\frac{\cos\theta}{a}, \frac{\sin\theta}{b})$，或者乘以 ab 后，写成 $(b\cos\theta, a\sin\theta)$。直线 ON 沿这个方向通过 O（它垂直于切线），所以线上的点为 $\mu(b\cos\theta, a\sin\theta)$，其方程为

$$a\sin\theta\, x = b\cos\theta\, y. \tag{1}$$

现在由 S 出发把 SP 参数化：线上的点为

$$(-ea + \lambda a(\cos\theta + e),\ \lambda b\sin\theta),$$

其中 $\lambda = 0$ 对应 S，$\lambda = 1$ 对应 P。代入 (1)，并约去因子 $\sin\theta \neq 0$，得

$$a(-ea + \lambda a(\cos\theta + e)) = \lambda b^2\cos\theta$$
$$\lambda(a^2\cos\theta + a^2e - b^2\cos\theta) = ea^2.$$

焦点（focus）条件正是在这里派上用场：$a^2 - b^2 = a^2e^2$，所以括号内的式子是 $a^2e^2\cos\theta + a^2e = a^2e(1 + e\cos\theta)$。除以 $a^2e \neq 0$，得

$$\lambda = \frac{1}{1 + e\cos\theta},$$

这一步是合理的，因为 $1+e\cos\theta \geq 1-e > 0$。因此 T 的 y 坐标为

$$y_T = \lambda b \sin\theta = \frac{b\sin\theta}{1+e\cos\theta},$$

正如所求。（留待稍后参考：由 (1) 可得 $x_T = \dfrac{b\cos\theta}{a\sin\theta}\, y_T = \dfrac{a(1-e^2)\cos\theta}{1+e\cos\theta}$。）

T 位于以 S 为圆心、半径为 a 的圆上

想一想 我们已经知道线段 ST 占 SP 的几分之几。还需要知道甚么?

由于 $T = S + \lambda(P-S)$ 且 $\lambda > 0$，我们有 $ST = \lambda\, SP$。所以只需求出长度 SP，即 P 的焦半径（focal distance）：

$$\begin{aligned} SP^2 &= (a\cos\theta + ea)^2 + b^2\sin^2\theta \\ &= a^2[\cos^2\theta + 2e\cos\theta + e^2 + (1-e^2)\sin^2\theta] \\ &= a^2[(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + 2e\cos\theta + e^2(1-\sin^2\theta)] \\ &= a^2[1 + 2e\cos\theta + e^2\cos^2\theta] = a^2(1+e\cos\theta)^2, \end{aligned}$$

其中第二行用了 $b^2 = a^2(1-e^2)$。由于 $a > 0$ 且 $1+e\cos\theta > 0$，由此得 $SP = a(1+e\cos\theta)$。于是

$$ST = \lambda\, SP = \frac{a(1+e\cos\theta)}{1+e\cos\theta} = a,$$

所以 T 位于以 S 为圆心、半径为 a 的圆上。

（如果你宁愿直接用坐标计算：$x_T + ea = \dfrac{a(\cos\theta + e)}{1+e\cos\theta}$，而 $(x_T+ea)^2 + y_T^2$ 可化简为 a^2，所用的代数运算与上面计算 SP^2 时完全相同。）

验算

- 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时，$P = (0, b)$，切线为 $y = b$，所以 ON 是 y 轴，而 $T = (0, y_T)$，由公式得 $y_T = b$。于是 $ST^2 = e^2a^2 + b^2 = a^2$，与预期相符。
- 取 $a = 3$，$b = 2$，$\theta = 60^\circ$（即图中的情况），以数值方法求两条直线的交点，得 $T \approx (0.4857,\ 1.2618)$；公式则给出 $y_T = \sqrt{3}/(1+\sqrt{5}/6) \approx 1.2618$，而 $ST \approx 3.0000$。
- 在趋向圆的极限 $e \to 0$ 之下，$S \to O$ 且 $T \to P$，而后者确实位于以 O 为圆心、半径为 a 的圆上。

常见错误

- 把 ON 当成平行于切线，而不是垂直于切线：ON 的方向是法向量 $(b\cos\theta, a\sin\theta)$，而不是 $(-a\sin\theta, b\cos\theta)$。
- 忘记把 $a^2 - b^2$ 换成 a^2e^2，结果得到一个无法化简的 λ 表达式。
- 除以 $\sin\theta$ 而不加说明；$\sin\theta = 0$ 的情况确实不成立。

STEP 之外

结果 $SP = a(1 + e\cos\theta) = a + ex_P$ 其实是焦点—准线性质（focus–directrix property）的另一种面貌：到焦点的距离等于到准线 $x = -a/e$ 的距离的 e 倍。以焦点为极点，用极坐标（polar coordinates）把圆锥曲线（conic）写成 $r = \ell/(1 + e\cos\phi)$，正是大学一年级力学课描述开普勒（Kepler）轨道的方式，而同一个分母 $1 + e\cos\theta$ 亦在这里出现了。关于圆锥曲线的几何，以及更多 STEP 风格的题目，可参阅 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*；关于轨道，可参阅 Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。