详细解答

STEP III 2008，第 2 题

纯数学 · 幂和

> **STEP III 2008，第 2 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/08-s3-q2

关键思路

$(r+1)^k - r^k$ 的和可以裂项相消（telescoping），最后只剩下一项。但我们也可以用二项式定理（binomial theorem）把每个括号展开，这样同一个和就变成较低次幂和 $S_j(n)$ 的组合。令两者相等，便得到一条递推关系（recurrence），可由前面各个幂和逐一建立 S_{k-1}；而要看出第 (ii) 部分的多项式结构，所需的也正是这条递推关系。

解答

第 (i) 部分

首先是裂项相消。把和式逐项写出，

$$\sum_{r=0}^{n}\left[(r+1)^k - r^k\right] = (1^k - 0^k) + (2^k - 1^k) + \cdots + ((n+1)^k - n^k) = (n+1)^k,$$

因为中间各项全部互相抵消，而且 $0^k = 0$（因为 $k \geq 1$）。

其次是二项式定理。对每个 r，

$$(r+1)^k - r^k = \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}r^j = 1 + \binom{k}{1}r + \binom{k}{2}r^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}r^{k-1},$$

因为 r^k 项互相抵消。对 $r = 0, 1, \ldots, n$ 求和，常数 1 贡献 $n+1$（r 共有 $n+1$ 个值），而每个 r^j（$j \geq 1$）则贡献 $S_j(n)$。所以

$$(n+1)^k = (n+1) + \binom{k}{1}S_1(n) + \binom{k}{2}S_2(n) + \cdots + \binom{k}{k-2}S_{k-2}(n) + \binom{k}{k-1}S_{k-1}(n).$$

最后一个系数是 $\binom{k}{k-1} = k$。至于其余各项，我们利用对称性 $\binom{k}{j} = \binom{k}{k-j}$，可知 $S_{k-j}(n)$ 的系数是 $\binom{k}{k-j} = \binom{k}{j}$；特别地，$S_1(n)$ 的系数是 $\binom{k}{1} = \binom{k}{k-1}$。把 $kS_{k-1}(n)$ 留在一边，其余各项全部移到另一边，得

$$kS_{k-1}(n) = (n+1)^k - (n+1) - \binom{k}{2}S_{k-2}(n) - \binom{k}{3}S_{k-3}(n) - \cdots - \binom{k}{k-1}S_1(n),$$

这正是所求的 $(*)$。（这里需要 $k \geq 2$，S_{k-1} 才是我们所定义的和之一。）

> **想一想** 为甚么我们把 $j = 0$ 的一项分开处理，而不把它写成 $S_0(n)$?

S_k 只对正数 k 有定义，而且在 $r = 0$ 时 “0^0” 的意义并不明确。把常数抽出来，直接数出它的总和是 $n+1$，就能同时避开这两个问题，也解释了 $(*)$ 中那个单独出现的 $-(n+1)$。

$S_3(n)$。在 $(*)$ 中取 $k = 4$，这时 $\binom{4}{2} = 6$ 及 $\binom{4}{3} = 4$：

$$\begin{aligned} 4S_3(n) &= (n+1)^4 - (n+1) - 6S_2(n) - 4S_1(n) \\ &= (n+1)^4 - (n+1) - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1). \end{aligned}$$

每一项都有因式 $n+1$，所以

$$\begin{aligned} 4S_3(n) &= (n+1)\left[(n+1)^3 - 1 - n(2n+1) - 2n\right] \\ &= (n+1)\left[n^3 + 3n^2 + 3n - 2n^2 - n - 2n\right] \\ &= (n+1)(n^3 + n^2) = n^2(n+1)^2. \end{aligned}$$

因此

$$S_3(n) = \tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2 = \big(S_1(n)\big)^2.$$

$S_4(n)$。取 $k = 5$，这时 $\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10$ 及 $\binom{5}{4} = 5$：

$$5S_4(n) = (n+1)^5 - (n+1) - 10S_3(n) - 10S_2(n) - 5S_1(n).$$

我们再次抽出因式 $n+1$，并代入 S_3、S_2 和 S_1 的表达式：

$$\begin{aligned} 5S_4(n) &= (n+1)\left[(n+1)^4 - 1 - \tfrac{5}{2}n^2(n+1) - \tfrac{5}{3}n(2n+1) - \tfrac{5}{2}n\right] \\ &= (n+1)\Big[n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n - \tfrac{5}{2}n^3 - \tfrac{5}{2}n^2 \\ &\qquad - \tfrac{10}{3}n^2 - \tfrac{5}{3}n - \tfrac{5}{2}n\Big] \\ &= (n+1)\left[n^4 + \tfrac{3}{2}n^3 + \tfrac{1}{6}n^2 - \tfrac{1}{6}n\right] \\ &= \tfrac{1}{6}n(n+1)\left(6n^3 + 9n^2 + n - 1\right). \end{aligned}$$

由于 S_4 应该像 S_2 一样含有因式 $2n+1$，我们把 $n=-\frac{1}{2}$ 代入这个三次式试一试：$-\frac{3}{4}+\frac{9}{4}-\frac{1}{2}-1=0$。所以 $2n+1$ 是因式，而 $6n^3+9n^2+n-1=(2n+1)(3n^2+3n-1)$。于是

$$S_4(n)=\tfrac{1}{30}\,n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1).$$

第 (ii) 部分

我们对 k 使用强归纳法 (strong induction)。命题在 $k=1$ 时成立, 因为 $S_1(n)=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$ 的次数是 2（在 $k=2$ 时亦成立）。

假设对某个 $k\geq 2$，$S_1(n),\ldots,S_{k-1}(n)$ 每一个都是 n 的多项式（polynomial），其中 S_j 的次数是 $j+1$。在 $(*)$ 中以 $k+1$ 代替 k：

$$(k+1)\,S_k(n)=(n+1)^{k+1}-(n+1)-\binom{k+1}{2}S_{k-1}(n)-\cdots-\binom{k+1}{k}S_1(n).$$

在右边：

- $(n+1)^{k+1}$ 是次数为 $k+1$ 的多项式，首项系数（leading coefficient）是 1；
- $n+1$ 的次数是 1；
- 根据归纳假设，每个 $S_j(n)$（$1\leq j\leq k-1$）都是次数为 $j+1\leq k$ 的多项式。

所以右边是一个多项式，它的 n^{k+1} 项只来自 $(n+1)^{k+1}$，不可能被抵消。除以 $k+1\neq 0$ 后，可知 $S_k(n)$ 是次数恰好为 $k+1$ 的多项式（首项系数是 $\frac{1}{k+1}$）。归纳至此完成。

想一想 多项式 $P(n)$ 的“常数项”和“各系数之和”分别对应甚么?

它们就是 $P(0)$ 和 $P(1)$。设 $S_k(n)=P(n)=a_{k+1}n^{k+1}+\cdots+a_1n+a_0$; 对每个整数 $n\geq 0$, 它都与和式 $\sum_{r=0}^{n}r^k$ 相等，所以我们可以代入 $n=0$ 和 $n=1$ 求值。

- 常数项：$a_0=P(0)=S_k(0)=0^k=0$，因为 $k\geq 1$。
- 各系数之和：$a_{k+1}+\cdots+a_1+a_0=P(1)=S_k(1)=0^k+1^k=1$。

两个结果均已证明。

验算

- 较小的数值：$S_3(3)=1+8+27=36=\frac{1}{4}\cdot 9\cdot 16$，以及 $S_4(3)=1+16+81=98=\frac{1}{30}\cdot 3\cdot 4\cdot 7\cdot 35$。
- 用我们的答案检验第 (ii) 部分：$S_4(n)=\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n$ 的常数项是 0，各系数之和是 $\frac{6+15+10-1}{30}=1$；它的首项系数是 $\frac{1}{5}=\frac{1}{k+1}$，与归纳法所预测的一致。

- 我们以直接求和的方法，对 $2 \le k \le 9$ 及 $0 \le n \le 30$ 准确地验证了 $(*)$，并对 $0 \le n < 200$ 验证了两个闭合形式（closed form）。

常见错误

- 忘记了 $\sum 1$ 中 $r = 0$ 的一项：它的贡献是 $n+1$，而不是 n。
- 没有先抽出公因式 $n+1$，而是把所有项全部展开，令 S_4 的代数运算繁复得多。
- 在第 (ii) 部分只说次数“至多是 $k+1$”。题目要求的是恰好 $k+1$，所以要指出 n^{k+1} 项不可能被抵消。

STEP 之外

这些多项式的系数由伯努利数（Bernoulli numbers）决定，而福尔哈伯公式（Faulhaber's formula）把 $S_k(n)$ 写成 n 的各次幂的组合，其系数是二项式系数（binomial coefficients）乘以伯努利数。$S_k(n)$ 是次数为 $k+1$ 的多项式，首项是 $\frac{n^{k+1}}{k+1}$，这一事实正是 $\int_0^x t^k \,\mathrm{d}t = \frac{x^{k+1}}{k+1}$ 的离散类比，而有限差分学（calculus of finite differences）把这个想法严格化。想做更多同类题目，可试试 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等数学难题》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。