详细解答

STEP III 2008，第 12 题

概率与统计 · 矩生成函数

STEP III 2008，第 12 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/08-s3-q12

本题在 *Beyond STEP* 第 12.24 节中心极限定理中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch12/clt.html

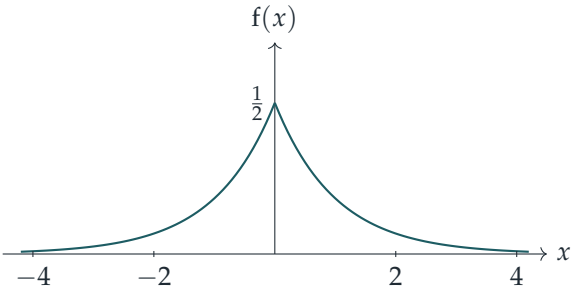
关键思路

密度函数中的绝对值（absolute value）把每个积分分成 $x < 0$ 和 $x > 0$ 两半，每一半都是普通的指数积分。此后整道题只靠矩母函数（moment generating function，简称 m.g.f.）的两个性质：独立（independent）变量之和的矩母函数，等于各自矩母函数之积；以及 $\mathrm{M}_{aY}(\theta) = \mathrm{M}_Y(a\theta)$。取对数后，$n$ 次方就变成 n 乘以一个很小的量，这正是麦克劳林级数（Maclaurin series）最擅长处理的情况。这就是中心极限定理（central limit theorem），而且在这个例子中，每一步都可以亲手算出来。

解答

略图

密度函数是偶函数，在 $x = 0$ 处取得最大值 $\frac{1}{2}$，该处有一个尖角（左、右导数分别为 $+\frac{1}{2}$ 和 $-\frac{1}{2}$），并在两侧以指数形式递减至 0。



矩母函数

根据定义，$\mathrm{M}_X(\theta) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{\theta X})$。在 0 处把积分分开，

$$\begin{aligned}\mathrm{M}_X(\theta) &= \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{(1+\theta)x}\,\mathrm{d}x + \tfrac{1}{2}\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(1-\theta)x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2(1+\theta)} + \frac{1}{2(1-\theta)} = \frac{(1-\theta)+(1+\theta)}{2(1-\theta^2)} = \frac{1}{1-\theta^2}.\end{aligned}$$

第一个积分只在 $1+\theta > 0$ 时收敛（converge），第二个只在 $1-\theta > 0$ 时收敛，所以上式对 $-1 < \theta < 1$ 成立，而我们只需要 $\theta = 0$ 附近的情况，这已经足够。这就是所求的结果。

至于方差（variance），当 $|\theta| < 1$ 时，把它展开为等比级数（geometric series）：

$$\mathrm{M}_X(\theta) = 1 + \theta^2 + \theta^4 + \cdots.$$

与 $\mathrm{M}_X(\theta) = 1 + \mathrm{E}(X)\,\theta + \frac{1}{2}\mathrm{E}(X^2)\,\theta^2 + \cdots$ 比较，可得 $\mathrm{E}(X) = 0$ 和 $\frac{1}{2}\mathrm{E}(X^2) = 1$。因此

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \big(\mathrm{E}(X)\big)^2 = 2.$$

（求导两次再代入 $\theta = 0$ 也得到相同结果，但用级数较快。）

青蛙：$Y/\sqrt{2n}$ 的矩母函数

由于各次跳跃 $X_1, \ldots, X_n$ 互相独立，$\mathrm{e}^{\theta X_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\theta X_n}$ 也互相独立，所以它们乘积的期望值（expectation）等于各期望值之积：

$$\mathrm{M}_Y(\theta) = \mathrm{E}\big(\mathrm{e}^{\theta X_1} \cdots \mathrm{e}^{\theta X_n}\big) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{M}_{X_i}(\theta) = (1-\theta^2)^{-n}.$$

设 $Z = Y/\sqrt{2n}$，则 $\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\theta Z}) = \mathrm{E}\big(\mathrm{e}^{(\theta/\sqrt{2n})Y}\big) = \mathrm{M}_Y\big(\theta/\sqrt{2n}\big)$，所以

$$\mathrm{M}_Z(\theta) = \left(1 - \frac{\theta^2}{2n}\right)^{-n}, \qquad |\theta| < \sqrt{2n}.$$

以 $\sqrt{2n}$ 作缩放是很自然的：$\mathrm{Var}(Y) = 2n$，所以 Z 的平均值为 0，方差为 1。

极限

固定 θ。只要 $n > \frac{1}{2}\theta^2$，便有 $0 \le \theta^2/(2n) < 1$，于是可以取对数，并使用对 $|u| < 1$ 成立的 $\ln(1-u) = -u - \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{3}u^3 - \cdots$：

$$\begin{aligned}\ln \mathrm{M}_Z(\theta) &= -n\ln\left(1 - \frac{\theta^2}{2n}\right) = n\left(\frac{\theta^2}{2n} + \frac{\theta^4}{8n^2} + \frac{\theta^6}{24n^3} + \cdots\right)\\ &= \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{8n} + \frac{\theta^6}{24n^2} + \cdots.\end{aligned}$$

? **想一想** 我们怎样知道，当 $n \to \infty$ 时，这个级数的尾部真的会消失?

设 $u = \theta^2/(2n)$，首项之后的所有项之和为 $n\left(\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 + \cdots\right) \le n \cdot \frac{1}{2}u^2(1 + u + u^2 + \cdots) = \dfrac{nu^2}{2(1-u)} = \dfrac{\theta^4}{8n(1-u)}$，由于 $u \to 0$，这个量趋向 0。所以 $\ln \mathrm{M}_Z(\theta) \to \frac{1}{2}\theta^2$，而 exp 是连续（continuous）函数，故

$$\mathrm{M}_{Y/\sqrt{2n}}(\theta) \to \exp\left(\tfrac{1}{2}\theta^2\right) \quad \text{当} n \to \infty,$$

这正是所要证明的。

最少跳跃次数

由于这个极限正是标准正态分布（standard Normal）的矩母函数，当 n 很大时，我们把 $Z = Y/\sqrt{2n}$ 视为近似服从 $\mathrm{N}(0,1)$。“落在距离起点 25 cm 或以上的位置”是指 $|Y| \ge 25$，两个方向都计算在内，所以

$$\mathrm{P}(|Y| \ge 25) = \mathrm{P}\left(|Z| \ge \frac{25}{\sqrt{2n}}\right) \approx 2\left(1 - \Phi\left(\frac{25}{\sqrt{2n}}\right)\right).$$

这个概率随 n 增加而上升（青蛙散布得更远），所以我们要找使它达到 5% 的最小 n。由于 $\Phi(1.96) = 0.975$，我们需要

$$\frac{25}{\sqrt{2n}} \le 1.96 \iff 2n \ge \left(\frac{25}{1.96}\right)^2 \approx 162.7 \iff n \ge 81.3.$$

所以最少跳跃次数是 $n = 82$。（当 $n = 81$ 时，近似概率约为 4.95%；当 $n = 82$ 时，约为 5.09%。）

验算

- $\mathrm{M}_X(0) = 1$，任何矩母函数都必须如此；而且 M_X 是偶函数，与略图的对称性吻合。
- 以数值积分（numerical quadrature）计算 $\int x^2 \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$ 得 2.0000，计算 $\int \mathrm{e}^{0.3x}\mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$ 得 $1.0989 = 1/0.91$。

- 取 $\theta = 1$，$(1 - \frac{1}{2n})^{-n}$ 在 $n = 10$ 时为 1.6702，在 $n = 100$ 时为 1.6508，逐渐逼近 $e^{1/2} = 1.6487$。
- 模拟 10^5 只青蛙，每只作 82 次拉普拉斯（Laplace）跳跃，结果约有 5.1% 的青蛙最后落在距离起点至少 25 cm 的位置。

常见错误

- 使用单尾（one-tailed）数值 1.645：青蛙可以落在任何一侧 25 cm 以外，所以两边尾部都要计算。
- 写成 $M_{Y/\sqrt{2n}}(\theta) = M_Y(\theta)/\sqrt{2n}$。把变量缩放，缩放的是其矩母函数的自变量。
- 把 81.3 四舍五入至最接近的整数而答 $n = 81$：当 $n = 81$ 时，概率仅略低于 5%。

STEP 之外

你刚才证明的，就是步长服从拉普拉斯分布时的中心极限定理，而一般情况的证明也循同一路线：把 $\ln M(\theta/\sqrt{n})$ 展开至二阶，再证明余下部分会消失。在大学一年级的课程中，你会遇到“连续性定理”（continuity theorem），它说明为何可以由矩母函数（或特征函数（characteristic function），它必定存在）的收敛推出概率的收敛，这一步我们在这里只是姑且相信。Grimmett 与 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率论入门）对两者都有论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。