详细解答

# STEP III 2008，第 11 题

力学 · 转动动力学

**STEP III 2008，第 11 题**

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

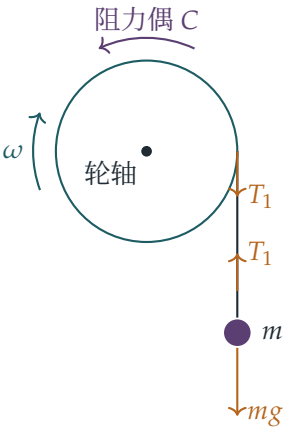
step.maths.org/questions/08-s3-q11

## 关键思路

力偶（couple）恒定，即角减速度（angular deceleration）恒定，所以绳子脱离之后，轮子服从转动版本的“suvat”方程，而第一个结果不过是“距离 = 平均速率 × 时间”。同一阶段亦让我们以 $I$ 表示阻力偶的大小。至于下降阶段，能量方程是最自然的工具：我们知道各部分移动了多远，而克服恒定力偶所作的功就是力偶 × 角度。

## 解答

**模型**。轮子是绕固定光滑轮轴转动的刚体（rigid body），唯一例外是受到一个大小恒为 $C$ 的阻力偶（resisting couple），它在整个运动过程中都起作用（质点下降期间如是，其后亦如是）。绳子是轻而不可伸长的，并且不打滑，所以绳子仍然连着时，质点的速率为 $v = r\omega$，其中 $\omega$ 是轮子的角速率（angular speed）。



绳子从轮子的右边离开，所以质点下落时轮子顺时针转动，而力偶 $C$ 则逆时针作用，阻碍运动。（我们其实用不着绳子的张力（tension）$T_1$，因为我们用的是能量方法。）

### 绳子脱离之后

此时轮子所受的力偶只有 $C$，所以对轮轴取矩（taking moments），

$$I\dot{\omega} = -C,$$

而角减速度 $C/I$ 是常数。因此角速率在时间 $T$ 内由 $\omega_0$ 线性地下降至 0，所以

$$\omega_0 = \frac{C}{I}\,T, \qquad \text{即} \qquad C = \frac{I\omega_0}{T}. \tag{1}$$

角速率既然线性下降，平均角速率就是 $\frac{1}{2}(\omega_0 + 0)$，而转过的角度等于平均角速率乘以时间。这个角度是 $n_2$ 转，即 $2\pi n_2$ 弧度（radians），所以

$$\tfrac{1}{2}\omega_0 T = 2\pi n_2,$$

这就是第一个结果。（它是 $s = \frac{1}{2}(u+v)t$ 的转动版本。）由此亦得

$$\omega_0 = \frac{4\pi n_2}{T}, \qquad \text{于是由 (1) 得} \qquad C = \frac{4\pi n_2 I}{T^2}. \tag{2}$$

### 质点下降期间

轮子转过 $n_1$ 转（即 $2\pi n_1$ 弧度）期间，绳子松开的长度为 $2\pi n_1 r$，所以质点下落的距离为 $2\pi n_1 r$。在脱离的一刻，轮子的角速率为 $\omega_0$，而由于绳子没有打滑，质点的速率为 $r\omega_0$。

> ? **想一想** 既然有阻力，为甚么这里仍可以用能量?

能量并不守恒，但功能原理（work–energy principle）依然成立：势能（potential energy）的损失等于动能（kinetic energy）的增加，再加上克服阻力所作的功。转过角度 $\theta$ 时，克服恒定力偶 $C$ 所作的功为 $C\theta$，正如克服恒力所作的功是力 × 距离。张力对整个系统不作净功，因为绳子轻而不可伸长，并且不打滑，所以它对轮子所作的功恰好等于它从质点取走的功。

所以，由释放至脱离，

$$mg\,(2\pi n_1 r) = \tfrac{1}{2}m(r\omega_0)^2 + \tfrac{1}{2}I\omega_0^2 + C\,(2\pi n_1).$$

现在把 (2) 中的 $\omega_0$ 和 $C$ 代入：

$$2\pi mgrn_1 = \tfrac{1}{2}\left(mr^2 + I\right)\frac{16\pi^2 n_2^2}{T^2} + 2\pi n_1 \cdot \frac{4\pi n_2 I}{T^2}.$$

全式乘以 $T^2/(2\pi)$，

$$\begin{aligned} mgrn_1T^2 &= 4\pi n_2^2\left(mr^2+I\right)+4\pi n_1n_2I \\ &= 4\pi mr^2n_2^2+4\pi n_2(n_1+n_2)\,I. \end{aligned}$$

移项，再除以 $4\pi n_2(n_1+n_2)$（此数为正），

$$I=\frac{mgrn_1T^2-4\pi mr^2n_2^2}{4\pi n_2(n_1+n_2)},$$

正是所求。

## 验算

- 量纲。分子的两项 $mgrT^2$ 和 $mr^2$ 都具有转动惯量（moment of inertia）的单位（$\mathrm{kg\,m^2}$），而 $n_1$、$n_2$ 是纯数。
- 数值验算。我们取 $I=0.5\,\mathrm{kg\,m^2}$、$m=1\,\mathrm{kg}$、$r=0.2\,\mathrm{m}$、$C=0.5\,\mathrm{N\,m}$、$g=9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ 和 $n_1=5$，以数值方法逐步计算这个运动。结果是 $\omega_0\approx 13.03\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$、$T\approx 13.03\,\mathrm{s}$ 和 $n_2\approx 13.52$。于是 $\frac{1}{2}\omega_0T\approx 84.94\approx 2\pi n_2$，而公式给出 $I=0.5000$。
- 没有阻力。若 $C\to 0$，轮子永不停下，所以 $T$ 和 $n_2$ 都趋向无限大；公式的表现仍然合理，因为分子的增长如 $T^2$，而分母的增长如 $n_2^2\propto T^2$。

## 常见错误

- 漏掉下降期间克服阻力所作的功。题目说明力偶是恒定的，而且它自始至终都起作用，并非只在绳子脱离之后。少了这一项，公式就会出错：在上面的例子中，会得出 $I\approx 0.39$ 而不是 0.5。
- 忘记质点的动能 $\frac{1}{2}mr^2\omega_0^2$；$-4\pi mr^2n_2^2$ 这一项正是由此而来。
- 混淆转数与弧度：$n$ 转等于 $2\pi n$ 弧度。

## STEP 之外

这是一个巧妙的实验方法：只要量度轮子由转动至停下所需的时间，并数算转数，就可以同时测出它的转动惯量和轴承的摩擦，即使事前两者皆不知道。大学本科的力学会把这些内容发展成完整的刚体转动理论，其中角动量（angular momentum）和力矩（torque）分别扮演动量和力的角色，而对于绕任意轴旋转的物体，转动惯量则变成一个张量（tensor）。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力学导论）对此有细致的阐述，并附有许多正是这种风格的习题。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。