详细解答

STEP III 2008，第 10 题

力学 · 弹性绳与能量

> **STEP III 2008，第 10 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/08-s3-q10

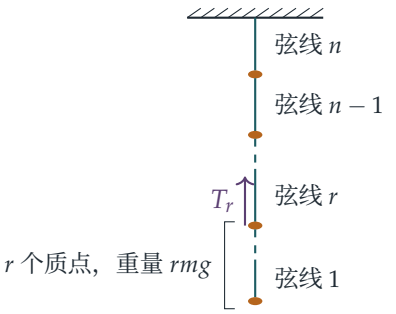
关键思路

每条短弦线都要承托悬挂在它下方的一切，所以它的张力（tension）很容易写出；再由胡克定律（Hooke's law）得出它的伸长量（extension）和所储存的能量，而总和就是 r 与 r^2 的标准求和。绳子的情况其实是同一幅图画，只是质量分散开来：把它切成 n 等份，把每一份的质量当作位于其下端的一个质点（particle），再让 $n \to \infty$。求和变成积分，而长度中的因子 $\frac{1}{2}$ 之所以出现，是因为平均而言，绳子的每一小段承托著绳子一半的重量。

解答

挂著质点的弦线

把各条短弦线视为遵从胡克定律的轻弹性弦线（light elastic string），并把各个质量视为质点。按题目所述，由底部起为弦线编号，于是弦线 r 下方有 r 个质点：它自己的质点，以及弦线 $1, \ldots, r-1$ 的质点。



整个系统处于静止状态。考虑弦线 r 顶端以下的一切：弦线 r、弦线 $1, \ldots, r-1$，以及挂

在它们上面的 r 个质点。作用于这部分的外力只有向下的重量 rmg 和弦线 r 中向上的张力 T_r（弦线是轻的）。所以

$$T_r = rmg.$$

根据胡克定律，弦线 r 的伸长量为

$$x_r = \frac{T_r\,\ell}{\lambda} = \frac{rmg\ell}{\lambda}.$$

所以长弦线的长度为

$$\sum_{r=1}^{n}(\ell + x_r) = n\ell + \frac{mg\ell}{\lambda}\sum_{r=1}^{n} r = n\ell + \frac{n(n+1)mg\ell}{2\lambda}.$$

自然长度（natural length）为 ℓ 的弦线伸长了 x 时，其弹性能（elastic energy）为 $\lambda x^2/(2\ell)$。对弦线 r 而言，这等于

$$\frac{\lambda}{2\ell}\left(\frac{rmg\ell}{\lambda}\right)^2 = \frac{r^2m^2g^2\ell}{2\lambda},$$

再利用 $\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$，总弹性能为

$$\frac{m^2g^2\ell}{2\lambda}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)\,m^2g^2\ell}{12\lambda}.$$

有重量的绳子

> **想一想** 对于质量连续分布的绳子，第一部分能帮上甚么忙?

把绳子切成 n 等份。每一份的自然长度为 $\ell = L_0/n$，质量为 $m = M/n$，而且每一份的弹性模量（modulus）都与整条绳子相同，同为 λ（模量与小段的长度无关）。如果把每一份的质量集中在其下端，得到的正正就是上面那条长弦线。当 $n \to \infty$ 时，各小段愈来愈短，这个集中质量的模型便趋近真实的绳子。

代入长度的公式，

$$n\ell + \frac{n(n+1)mg\ell}{2\lambda} = L_0 + \frac{n(n+1)}{2\lambda}\cdot\frac{Mg}{n}\cdot\frac{L_0}{n} = L_0 + \frac{MgL_0}{2\lambda}\left(1+\frac{1}{n}\right) \longrightarrow L_0\left(1+\frac{Mg}{2\lambda}\right)$$

当 $n \to \infty$。所以

$$L = L_0\left(1+\frac{Mg}{2\lambda}\right),$$

正如所求。

你也可以直接计算。设 s 为某一点下方绳子的自然长度，则该点所承托的重量为 Mgs/L_0。在该处取自然长度为 δs 的一小段，其张力为 $T = Mgs/L_0$，所以它伸长了 $T\,\delta s/\lambda$。全部加起来，

$$L - L_0 = \int_0^{L_0}\frac{Mgs}{\lambda L_0}\,\mathrm{d}s = \frac{MgL_0}{2\lambda}.$$

至于能量，作同样的代入可得

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{12\lambda}\cdot\frac{M^2g^2}{n^2}\cdot\frac{L_0}{n}=\frac{M^2g^2L_0}{12\lambda}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\longrightarrow\frac{M^2g^2L_0}{6\lambda}.$$

（直接计算：该小段储存的能量为 $T^2\,\delta s/(2\lambda)$，而 $\int_0^{L_0}\frac{M^2g^2s^2}{2\lambda L_0^2}\,\mathrm{d}s=\frac{M^2g^2L_0}{6\lambda}$。）

要把结果以 L、L_0 和 λ 表示，可利用长度的公式消去 Mg：

$$L-L_0=\frac{MgL_0}{2\lambda}\quad\Longrightarrow\quad Mg=\frac{2\lambda(L-L_0)}{L_0}.$$

因此绳子所储存的弹性能为

$$\frac{L_0}{6\lambda}\cdot\frac{4\lambda^2(L-L_0)^2}{L_0^2}=\frac{2\lambda(L-L_0)^2}{3L_0}.$$

验算

- 取 $n=1$ 时，第一部分给出长度 $\ell+mg\ell/\lambda$ 和能量 $m^2g^2\ell/(2\lambda)$：这正是一条弦线挂著一个质点的情况，理应如此。
- 试比较一条总伸长量同为 $e=L-L_0$、但张力均匀的绳子：它所储存的能量是 $\lambda e^2/(2L_0)$。我们的答案是这个值的 $\frac{4}{3}$ 倍，这是合理的，因为拉伸集中在顶部附近，而能量随局部应变（strain）的平方增长。
- 数值上，取 $M=3$、$L_0=2$、$\lambda=50$、$g=9.8$：公式给出 $L=2.588$ 和能量 5.7624；取 $n=100\,000$ 的离散链则给出 2.58801 和 5.76249，而 $2\lambda(L-L_0)^2/(3L_0)=5.7624$。

常见错误

- 把弦线 r 的张力当作 $(n-r+1)mg$：按题目的编号，弦线 n 在最顶，所以弦线 r 承托的是 r 个质点。
- 把每一小段绳子的模量取为 λ/n。模量是材料和横截面的性质，与长度无关；随长度改变的是劲度（stiffness）λ/ℓ。
- 题目要求以 L、L_0 和 λ 表示能量，却把答案留在以 M 和 g 表示的形式。

STEP 之外

由 n 个集中质量过渡到连续的绳子，是连续介质力学（continuum mechanics）最基本的一步：张力变成函数 $T(s)$，胡克定律变成局部应力（stress）与应变之间的关系，而能量变

成能量密度的积分。同样是这条由质量和弹簧组成的链，一旦让它振动起来，取极限后便得到弦线的波动方程（wave equation）。Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）是了解这些想法如何展开的好去处。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。