详细解答

STEP III 2008，第 1 题

纯数学 · 非线性联立方程

STEP III 2008，第 1 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/08-s3-q1

关键思路

设 $s_k = ax^k + by^k$，则题目的方程给出了 s_0, s_1, s_2, s_3。由于 x 和 y 是 $t^2 - pt + q = 0$ 的两个根，其中 $p = x + y$、$q = xy$，这些幂和（power sums）满足一个递推关系（recurrence）：每个 s_k 等于 p 乘以前一项，再减去 q 乘以再前一项。这正是提示中“乘以 $x + y$”所得到的结果。于是四条非线性方程化为关于 p 和 q 的两条线性方程。之后解一条二次方程便得 x 和 y，再由首两条方程求出 a 和 b。

解答

设 $s_k = ax^k + by^k$，其中 $k = 0, 1, 2, 3$，则 $s_0 = 1$、$s_1 = \frac{1}{3}$、$s_2 = \frac{1}{5}$、$s_3 = \frac{1}{7}$。令 $p = x + y$ 及 $q = xy$。

幂和的递推关系

对任意 a, b, x, y 及任意 $k \geq 1$，

$$(x + y)(ax^k + by^k) = ax^{k+1} + by^{k+1} + xy\,(ax^{k-1} + by^{k-1}),$$

因为交叉项是 $axyx^{k-1}$ 和 $bxy\,y^{k-1}$。用我们的记号，即

$$s_{k+1} = p\,s_k - q\,s_{k-1}.$$

这是一条恒等式（identity），所以对方程组的每一个解都成立。

求 $x+y$ 和 xy

取 $k=1$ 和 $k=2$，并代入已知数值：

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{5} &= \tfrac{1}{3}p - q,\\ \tfrac{1}{7} &= \tfrac{1}{5}p - \tfrac{1}{3}q.\end{aligned}$$

由第一式得 $q = \frac{1}{3}p - \frac{1}{5}$。代入第二式，

$$\tfrac{1}{7} = \tfrac{1}{5}p - \tfrac{1}{9}p + \tfrac{1}{15} \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{4}{45}p = \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{15} = \tfrac{8}{105} \quad\Longrightarrow\quad p = \tfrac{6}{7},$$

于是 $q = \frac{2}{7} - \frac{1}{5} = \frac{3}{35}$。这个线性方程组的行列式（determinant）不为零，所以这些数值是唯一确定的：每一个解都满足 $x+y=\frac{6}{7}$ 及 $xy=\frac{3}{35}$。

求 x 和 y

因此 x 和 y 是以下方程的两个根：

$$t^2 - \tfrac{6}{7}t + \tfrac{3}{35} = 0, \qquad \text{即} \qquad 35t^2 - 30t + 3 = 0,$$

由此得

$$t = \frac{30 \pm \sqrt{900-420}}{70} = \frac{30 \pm 4\sqrt{30}}{70} = \frac{15 \pm 2\sqrt{30}}{35}.$$

判别式（discriminant）为正，所以 $x \neq y$，而 $\{x, y\}$ 就是这两个数，次序可以任选其一。

> ? **想一想** 知道了 x 和 y 之后，能否肯定 a 和 b 也随之确定?

可以。x 和 y 已知之后，首两条方程 $a+b=1$ 和 $ax+by=\frac{1}{3}$ 是关于 a 和 b 的线性方程，其行列式为 $y-x$。由于 $x \neq y$，这个行列式不为零，所以恰好有一对 (a,b)。

求 a 和 b

取 $x = \frac{15+2\sqrt{30}}{35}$ 及 $y = \frac{15-2\sqrt{30}}{35}$，则 $x - y = \frac{4\sqrt{30}}{35}$。从 $a+b=1$ 和 $ax+by=\frac{1}{3}$ 消去 b，得 $a(x-y) = \frac{1}{3} - y$。现在

$$\tfrac{1}{3} - y = \frac{35 - 3(15 - 2\sqrt{30})}{105} = \frac{6\sqrt{30} - 10}{105},$$

所以

$$a = \frac{6\sqrt{30}-10}{105} \cdot \frac{35}{4\sqrt{30}} = \frac{6\sqrt{30}-10}{12\sqrt{30}} = \frac{1}{2} - \frac{5}{6\sqrt{30}} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{30}}{36},$$

而 $b = 1 - a = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{30}}{36}$。

这些确实是解

我们至此只证明了任何解都必定是这个样子，所以仍须验证它确实成立。按构造方式，$s_0 = 1$ 及 $s_1 = \frac{1}{3}$。由于 p 和 q 满足上面两条线性方程，递推关系给出 $s_2 = ps_1 - qs_0 = \frac{1}{5}$，继而 $s_3 = ps_2 - qs_1 = \frac{1}{7}$。所以四条方程全部成立。

把 x 和 y 的角色互换，a 和 b 也随之互换。因此恰好有两个解：

$$(a, b, x, y) = \left(\frac{18 - \sqrt{30}}{36}, \frac{18 + \sqrt{30}}{36}, \frac{15 + 2\sqrt{30}}{35}, \frac{15 - 2\sqrt{30}}{35} \right)$$

以及把 $a \leftrightarrow b$ 和 $x \leftrightarrow y$ 同时互换所得的解。在两个解中，x, y 之中较大者都与较小的系数配对。

验算

数值上，$x \approx 0.741556$、$y \approx 0.115587$、$a \approx 0.347855$ 及 $b \approx 0.652145$。于是 $ax + by \approx 0.333333$、$ax^2 + by^2 \approx 0.200000$ 及 $ax^3 + by^3 \approx 0.142857$，与 $\frac{1}{3}$、$\frac{1}{5}$ 和 $\frac{1}{7}$ 吻合至机器精度。再作一个简单的合理性检查：x 和 y 都在 $(0, 1)$ 之内，而 a 和 b 都是正数。这与右边各数是 t^{2k} 在 $[0, 1]$ 上的平均值一致（见下文）。

常见错误

- 解出了 x 和 y，却忘记配对是有关系的：a 与 x 相配，所以不能只互换 x 和 y 而不同时互换 a 和 b。
- 找到必要条件（necessary conditions）便停下来。题目说的是“求所有解”，所以既要证明每一个解都是这个形式，也要证明这些数值确实满足全部四条方程。

STEP 之外

$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}$ 这些数就是 $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t^{2k}\,\mathrm{d}t$。所以这个方程组其实是在找一条法则 $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f \approx \frac{a}{2}\big(f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x})\big) + \frac{b}{2}\big(f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})\big)$，使它对次数不超过 7 的多项式都精确成立。这就是四点高斯—勒让德求积法（*Gauss–Legendre quadrature*）：它的节点（nodes）是 $\pm\sqrt{x}$ 和 $\pm\sqrt{y}$，而 $a \approx 0.3479$ 和 $b \approx 0.6521$ 就是它著名的权（weights）。像我们这里所做的那样，由幂和找出递推关系，也是信号处理中 Prony 方法（Prony's method）背后的想法。想进一步了解，可参阅 Süli 与 Mayers 的 *An Introduction to Numerical Analysis*（数值分析入门）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。