详细解答

STEP II 2008，第 9 题

力学 • 抛体运动

STEP II 2008，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

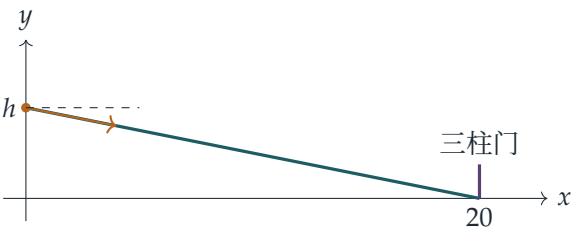
step.maths.org/questions/08-s2-q9

关键思路

水平方向的运动决定了以 α 表示的飞行时间（time of flight），把这个时间代入垂直方向的运动，便得到一条连系 α 与 h 的方程。利用 $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$，可把它化为关于 $\tan\alpha$ 的二次方程（quadratic），这是处理“以哪个角度才能击中目标?”一类问题的标准技巧。之后，凭着对板球的常识选出合适的根，再以小角近似（small-angle approximation）完成余下的工作。

解答

我们把球看成一个质点（particle），只受重力作用而自由运动，不计空气阻力，也不计旋转。取抛射点正下方地面上的一点为原点，x 轴沿水平方向指向三柱门，y 轴垂直向上，于是球从 $(0, h)$ 出发，速率为 $40\,\mathrm{m\,s^{-1}}$，方向与水平线成仰角 α（α 为负数表示球是向下投出的）。



第 (i) 部分

水平方向没有力的作用，所以 $x = 40t\cos\alpha$。球到达 $x = 20$ 的时刻为

$$t = \frac{20}{40\cos\alpha} = \frac{1}{2\cos\alpha}.$$

垂直方向的加速度为 $-10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$，所以

$$y = h + 40t\sin\alpha - 5t^2.$$

此时球位于地面，即 $y = 0$，所以

$$0 = h + 40\sin\alpha\cdot\frac{1}{2\cos\alpha} - \frac{5}{4\cos^2\alpha} = h + 20\tan\alpha - \tfrac{5}{4}\sec^2\alpha.$$

现在利用 $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$，并记 $T = \tan\alpha$：

$$h + 20T - \tfrac{5}{4}(1 + T^2) = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad 5T^2 - 80T + 5 - 4h = 0.$$

由二次公式（quadratic formula），

$$T = \frac{80 \pm \sqrt{6400 - 20(5-4h)}}{10} = \frac{80 \pm \sqrt{6300 + 80h}}{10},$$

所以两个可能的值是

$$\tan\alpha = 8 \pm \sqrt{63 + \tfrac{4}{5}h}.$$

两者皆为实数，因为 $h \geq 0$。

? **想一想** 快速投球手实际上会用哪一个根?

由于 $\sqrt{63} \approx 7.9$，较大的根给出 $\tan\alpha \approx 16$，即 $\alpha \approx 86°$：这是一记冲天高吊球，会升高约 80 m，并要大约 8 s 才落到三柱门上。快速投球手不会这样投球。较小的根，

$$\tan\alpha = 8 - \sqrt{63 + \tfrac{4}{5}h},$$

才是合适的选择。对于合乎现实的出手高度（约两米左右），$63 + \frac{4}{5}h$ 接近 64，所以 $\tan\alpha$ 接近 0。例如，只要 h 介乎 0 与 3 之间，便有 $|\tan\alpha| < 0.09$。因此 α 是一个小角，而 $\cos\alpha \approx 1$，球到达三柱门所需的时间为

$$t = \frac{1}{2\cos\alpha} \approx \tfrac{1}{2}\,\mathrm{s},$$

正如题目所求。（事实上 $t = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \tan^2\alpha}$，只要 $|\tan\alpha| < 0.1$，它与 $\frac{1}{2}$ 的差距便不超过 0.5%。）

第 (ii) 部分

球向水平线以下投出，当且仅当 $\tan\alpha < 0$。较大的根恒为正数，所以我们采用较小的根：

$$8 - \sqrt{63 + \tfrac{4}{5}h} < 0 \iff \sqrt{63 + \tfrac{4}{5}h} > 8 \iff 63 + \tfrac{4}{5}h > 64 \iff h > \tfrac{5}{4},$$

其中平方这一步可逆，因为两边皆为正数。所以当 $h > 1.25$ 时，投球手是向水平线以下投出球的。当 $h = 1.25$ 恰好成立时，球沿水平方向投出。

第 (iii) 部分

当 $h = 2.5$ 时，由第 (ii) 部分可知 α 是一个小的负角。取 $\cos\alpha \approx 1$ 和 $\sin\alpha \approx \alpha$（以弧度（radians）计），便有 $\tan\alpha \approx \alpha$ 和 $\sec^2\alpha \approx 1$，所以第 (i) 部分的方程 $0 = h + 20\tan\alpha - \frac{5}{4}\sec^2\alpha$ 变成

$$0 \approx 2.5 + 20\alpha - 1.25, \qquad \text{所以} \qquad \alpha \approx -\frac{1.25}{20} = -0.0625 \text{ rad}.$$

换算成度数，

$$\alpha \approx -0.0625 \times \frac{180}{\pi} \approx -3.58^\circ,$$

所以 $\alpha \approx -3.6^\circ$。球出手时的方向在水平线以下约 3.6°。

另一个看法：利用二项式近似（binomial approximation），$\tan\alpha = 8 - \sqrt{65} = 8 - 8\sqrt{1 + \frac{1}{64}} \approx 8 - 8(1 + \frac{1}{128}) = -\frac{1}{16}$。这给出相同的答案。

验算

- 精确值。$\tan\alpha = 8 - \sqrt{65} = -0.06226$，所以 $\alpha = -3.563^\circ$，准确至两位有效数字是 -3.6°，与近似结果吻合。
- 模拟。从 $(0, 2.5)$ 出发，以 $40\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$ 和 -3.563° 逐步作数值计算，球在 $0.501\,\text{s}$ 后到达 $x = 20$，此时高度为 $0.0000\,\text{m}$。
- 临界情况。当 $h = 1.25$ 时，较小的根是 $8 - \sqrt{64} = 0$：球沿水平方向投出，在半秒的飞行中下坠 $5(0.5)^2 = 1.25\,\text{m}$，刚好落在三柱门处。

常见错误

- 忘记 $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$，而试图分别以 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 求解，结果变得十分繁复。
- 以弧度给出角度，或在度数制下使用小角近似：$\sin\theta \approx \theta$ 只在 θ 以弧度计时才成立。
- 在第 (iii) 部分漏掉负号。正如第 (ii) 部分所预示，这个角是在水平线以下的。

STEP 之外

两个根的结构反映了一个普遍事实：以固定速率抛出的抛体，可沿两条轨迹到达其“包络线”（envelope，即安全抛物线（parabola of safety））以内的任何一点。在包络线上，两条轨迹合而为一，而包络线以外的点则完全无法到达。真实的板球还会受到阻力（drag）以及由旋转产生的马格努斯效应（Magnus effect）影响，这会引出非线性微分方程（nonlinear differential equations），通常要用数值方法求解。Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）以大学一年级的程度讨论抛体运动和有阻力的运动。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。