详细解答

# STEP II 2008，第 8 题

纯数学 · 向量与角平分线

**STEP II 2008，第 8 题**

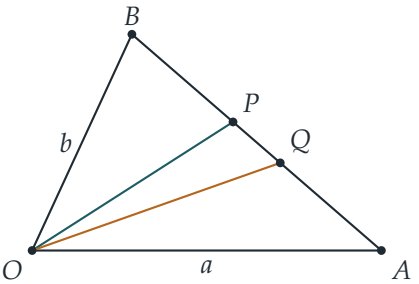
继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/08-s2-q8

## 关键思路

沿 $\angle AOB$ 的角平分线（angle bisector）方向的向量，就是沿 $OA$ 和 $OB$ 的单位向量（unit vector）之和：把两个长度相等的向量相加，得到的是菱形（rhombus）的对角线，而菱形的对角线平分其顶角。把这个向量与 $P$ 的位置向量（position vector）对照，便可定出 $\lambda$。之后，$Q$ 不过是把 $A$ 与 $B$ 的角色互换后的 $P$，而最后的恒等式只需用纯量积（scalar product）直接计算，当中棘手的一项 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 会互相抵销。

## 解答




图中 $a > b$，所以 $P$（位于角平分线上，以蓝绿色标示）较接近 $B$，而 $Q$ 与 $B$ 的距离，等于 $P$ 与 $A$ 的距离。

### $P$ 的位置向量

由于 $AP : PB = (1-\lambda) : \lambda$，而这两段合起来就是 $AB$，所以 $AP = (1-\lambda)AB$，因此 $\overrightarrow{AP} = (1-\lambda)(\mathbf{b}-\mathbf{a})$，并且

$$\overrightarrow{OP} = \mathbf{a} + (1-\lambda)(\mathbf{b}-\mathbf{a}) = \lambda\mathbf{a} + (1-\lambda)\mathbf{b}.$$

（验证：$\lambda = 1$ 时得 $A$，$\lambda = 0$ 时得 $B$，与该比例相符。）

### 求 $\lambda$

向量 $\mathbf{a}/a$ 和 $\mathbf{b}/b$ 分别是沿 $OA$ 和 $OB$ 的单位向量。两者之和是一个菱形的对角线，该菱形的边分别沿 $OA$ 和 $OB$，所以它指向 $\angle AOB$ 的角平分线方向。由于 $P$ 位于这条角平分线上，

$$\lambda\mathbf{a} + (1-\lambda)\mathbf{b} = k\left(\frac{\mathbf{a}}{a} + \frac{\mathbf{b}}{b}\right)$$

其中 $k$ 为某个纯量。

> ? **想一想** 为甚么可以分别比较 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的系数?

因为 $O$、$A$、$B$ 不共线（collinear），$\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 均非零向量，而且互不平行，所以 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 线性独立（linearly independent）：若 $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \mathbf{0}$，则 $\alpha = \beta = 0$。因此

$$\lambda = \frac{k}{a}, \qquad 1-\lambda = \frac{k}{b}.$$

两式相加，得 $1 = k\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$，所以 $k = \dfrac{ab}{a+b}$，并且

$$\boxed{\lambda = \frac{b}{a+b}}, \qquad 1-\lambda = \frac{a}{a+b}.$$

这其实就是角平分线定理（angle bisector theorem）的另一种面貌：$AP : PB = (1-\lambda) : \lambda = a : b = OA : OB$。所以

$$\overrightarrow{OP} = \frac{b\,\mathbf{a} + a\,\mathbf{b}}{a+b}.$$

### 点 $Q$ 与恒等式

$Q$ 在 $AB$ 上，且 $BQ = AP = (1-\lambda)AB$，所以沿用求 $P$ 时的推论，只是改由 $B$ 而非 $A$ 量起，

$$\overrightarrow{OQ} = \mathbf{b} + (1-\lambda)(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = (1-\lambda)\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} = \frac{a\,\mathbf{a} + b\,\mathbf{b}}{a+b}.$$

设 $c = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$，并利用 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = a^2$、$\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = b^2$。于是

$$(a+b)^2\,OQ^2 = (a\mathbf{a} + b\mathbf{b})\cdot(a\mathbf{a} + b\mathbf{b}) = a^2\cdot a^2 + 2ab\,c + b^2\cdot b^2 = a^4 + b^4 + 2abc,$$
$$(a+b)^2\,OP^2 = (b\mathbf{a} + a\mathbf{b})\cdot(b\mathbf{a} + a\mathbf{b}) = b^2a^2 + 2ab\,c + a^2b^2 = 2a^2b^2 + 2abc.$$

两式相减，含 $c$ 的项互相抵销：

$$(a+b)^2\left(OQ^2-OP^2\right)=a^4-2a^2b^2+b^4=(a^2-b^2)^2=(a-b)^2(a+b)^2.$$

两边除以 $(a+b)^2\neq 0$，得

$$OQ^2-OP^2=(a-b)^2=(b-a)^2,$$

这正是所求。

## 验算

取 $\mathbf{a}=(3,0)$ 和 $\mathbf{b}=(0,4)$，则 $a=3$、$b=4$，而 $\angle AOB$ 是直角。这时 $\lambda=\frac{4}{7}$，$\overrightarrow{OP}=\left(\frac{12}{7},\frac{12}{7}\right)$，它位于 $y=x$ 上，即该直角的角平分线。另外 $\overrightarrow{OQ}=\left(\frac{9}{7},\frac{16}{7}\right)$，所以 $OQ^2-OP^2=\frac{337}{49}-\frac{288}{49}=1=(4-3)^2$。若 $a=b$，三角形是等腰三角形，$P=Q$ 是 $AB$ 的中点，两者之差为 0，正如所料。以二维和三维空间中 20,000 个随机三角形作数值测试，所有结果均吻合，误差在 $10^{-13}$ 以内。

## 常见错误

- 写成 $\overrightarrow{OP}=(1-\lambda)\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$：比例中较大的一份 $1-\lambda$ 是与 $A$ 的距离，所以它应该配 $\mathbf{b}$。可用 $\lambda=1$ 检验。
- 用 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ 作为角平分线的方向。这只在 $a=b$ 时才成立；必须使用单位向量。
- 把 $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2$ 展开成 $a^2+b^2$，漏掉了交叉项（cross term）$2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$。本题中这一项会抵销，但前提是两个展开式中都有它。

## STEP 之外

最后的计算，其实是长度在线性映射（linear map）下如何变换的一个特例：$OP^2$ 和 $OQ^2$ 是二次型（quadratic form）$\mathbf{x}\mapsto\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}$ 的值，而交叉项则由 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的格拉姆矩阵（Gram matrix）决定。单位向量相加得出角平分线这一事实亦可推广：在任何内积空间（inner-product space）中，要找出两个向量“正中间”的方向，做法就是先归一化（normalise）再相加。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门）正是本着这种精神阐述纯量积、长度和角度。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。