详细解答

STEP II 2008，第 7 题

纯数学 · 一阶微分方程

STEP II 2008，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/08-s2-q7

关键思路

左边的 $\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 正是 $\ln y$ 的导数（derivative），所以处理这个代换（substitution）的最佳方法是取对数（logarithm）：乘积 $y = u\,(1+x^2)^{1/2}$ 会变成和，而右边的 $\frac{x}{1+x^2}$ 一项恰好是 $\ln(1+x^2)^{1/2}$ 的导数。这一项消去后，剩下的是一条关于 u 的可分离变量方程（separable equation）。第 (ii) 部分是同一个想法，只是换成立方根；把两个答案并排一看，第 (iii) 部分的规律便一目了然。

解答

第 (i) 部分

在 $x = 0$ 处有 $y = 1 \neq 0$，而方程中含有 $1/y$，所以我们在 $x = 0$ 附近一个使 $y \neq 0$ 的区间上进行讨论。由于 $(1+x^2)^{1/2} > 0$，由代换可知在该区间上亦有 $u \neq 0$，并且 $u(0) = 1$。

对 $|y| = |u|\,(1+x^2)^{1/2}$ 取对数，然后求导，得

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{x}{1+x^2}.$$

与原来的微分方程（differential equation）比较，$\frac{x}{1+x^2}$ 各项互相消去，剩下

$$\frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = xy = x\,u\,(1+x^2)^{1/2}, \qquad \text{所以} \qquad \frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = x(1+x^2)^{1/2},$$

这里两边除以 u，由于 $u \neq 0$，这样做是容许的。

? **想一想** 怎样才能干净利落地求 $x(1+x^2)^{1/2}$ 的积分?

因子 x 是 $1+x^2$ 的导数的一半，所以由逆向链式法则（reverse chain rule）得 $\int x(1+x^2)^{1/2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2} = \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2}$，再加上一个常数。（不妨求导验证一下。）

两边对 x 积分，得

$$-\frac{1}{u} = \tfrac{1}{3}(1+x^2)^{3/2} + C.$$

当 $x=0$ 时，$u=1$，所以 $-1 = \frac{1}{3}+C$，即 $C=-\frac{4}{3}$。因此

$$\frac{1}{u} = \frac{4-(1+x^2)^{3/2}}{3}, \qquad u = \frac{3}{4-(1+x^2)^{3/2}},$$

于是

$$\boxed{y = \frac{3\,(1+x^2)^{1/2}}{4-(1+x^2)^{3/2}}}$$

这个解在包含 0 而分母为正的区间上成立，亦即 $(1+x^2)^{3/2}<4$，即 $|x|<\sqrt{2^{4/3}-1}\approx 1.233$；当 $|x|$ 趋近这个值时，$y\to\infty$。

第 (ii) 部分

这次多出来的一项是 $\frac{x^2}{1+x^3}$，它是 $\frac{1}{3}\ln(1+x^3) = \ln(1+x^3)^{1/3}$ 的导数。这提示我们设 $y = u\,(1+x^3)^{1/3}$，并在 $x=0$ 附近（该处 $1+x^3>0$）进行讨论。与上面完全一样，

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{x^2}{1+x^3},$$

所以方程变成

$$\frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = x^2 y = x^2 u\,(1+x^3)^{1/3}, \qquad \frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = x^2(1+x^3)^{1/3}.$$

这次 x^2 是 $1+x^3$ 的导数的三分之一，所以

$$-\frac{1}{u} = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{3}{4}(1+x^3)^{4/3} + C = \tfrac{1}{4}(1+x^3)^{4/3} + C.$$

由 $u=1$ 于 $x=0$，得 $-1=\frac{1}{4}+C$，所以 $C=-\frac{5}{4}$。于是 $\frac{1}{u} = \frac{5-(1+x^3)^{4/3}}{4}$，并且

$$\boxed{y = \frac{4\,(1+x^3)^{1/3}}{5-(1+x^3)^{4/3}}}$$

这个解在 0 附近成立，范围是 $-1<x<\left(5^{3/4}-1\right)^{1/3}\approx 1.33$。

第 (iii) 部分

比较两个答案：分子出现的是方根 $(1+x^n)^{1/n}$，分母出现的是幂 $(1+x^n)^{(n+1)/n}$，而常数分别是 $n+1$ 和 $n+2$。因此我们猜想（conjecture）

$$\boxed{y=\frac{(n+1)\,(1+x^n)^{1/n}}{n+2-(1+x^n)^{(n+1)/n}}}$$

当 $n=2$ 和 $n=3$ 时，这个式子正好给出 (i) 和 (ii) 的答案。（题目没有要求证明，但用同样的代换 $y=u(1+x^n)^{1/n}$ 便可证明：$\int x^{n-1}(1+x^n)^{1/n}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}(1+x^n)^{(n+1)/n}$，而 $x=0$ 处的条件给出常数 $-\frac{n+2}{n+1}$。）

验算

- 当 $x=0$ 时，每条公式都给出 $\frac{n+1}{n+2-1}=1$，符合要求。
- 在 (i) 中 $x=0$ 附近，由方程可得 $y'(0)=0$，而 $(1+x^2)^{1/2}$ 和 $(1+x^2)^{3/2}$ 在 0 处的斜率确实都是零。
- 以数值方法解这些方程（由 $x=0$ 出发，用龙格－库塔（Runge–Kutta）法逐步计算），所得结果与公式相符，误差小于 10^{-8}，已对 $n=2,3,4,5,7$ 在多个点上作过检验。例如在 (i) 中当 $x=1$ 时，$y=\frac{3\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}\approx 3.6213$；在 (ii) 中当 $x=1$ 时，$y=\frac{4\cdot 2^{1/3}}{5-2^{4/3}}\approx 2.0320$。

常见错误

- 代入 $y=u(1+x^2)^{1/2}$ 后直接用积法则（product rule）求导：这样做是可行的，但式子很繁琐。先把全式除以 y（等价于取对数），相消的情况便一目了然。
- 忘记 $\int u^{-2}\,\mathrm{d}u=-u^{-1}$ 中的负号，以致常数出错。
- 在错误的阶段确定常数：应在移项整理之前代入 $u(0)=1$（而不是在关于 u 的方程中代入 $y(0)=1$）。

STEP 之外

这条方程是一条*伯努利方程*（*Bernoulli equation*）：$y'=P(x)y+Q(x)y^2$，通用的技巧是代换 $v=1/y$，把它化为线性（linear）方程。本题所给的代换则分两步完成同一件事：先用类似积分因子（integrating factor）的 $(1+x^n)^{1/n}$ 消去含 P 的一项，然后分离变量。还要留意，虽然方程看来平平无奇，它的解却在有限的 x 处趋向无穷；这种“有限时间爆破（finite-time blow-up）”是含有 y^2 项的方程的典型现象，在常微分方程（ODE）的

入门课程中会学到。Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（常微分方程入门教科书）涵盖了伯努利方程和解的存在性。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。